



Entre números, signos y letras: Enteros y Álgebra al comienzo de la ESO

Eva Cid

ecid@unizar.es

Universidad de Zaragoza

Pablo Beltrán-Pellicer

pbeltran@unizar.es

Universidad de Zaragoza

José M. Muñoz-Escolano

jmescola@unizar.es

Universidad de Zaragoza

Núcleo temático: Procesos, formación del profesorado.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

En este taller se presenta una propuesta didáctica de iniciación al álgebra y a los números enteros que tiene en cuenta la ruptura que supone el paso de la aritmética al álgebra y que la razón de ser de los números enteros se encuentra en el álgebra con literales, así como los obstáculos que presentan los modelos concretos para construir los enteros. En dicha propuesta se inicia el cálculo algebraico sin haber introducido previamente los números enteros que se van construyendo a medida que el cálculo algebraico los necesita. Además, las letras se utilizan como variables, antes que como incógnitas, y los problemas aritméticos tienen datos desconocidos o variables que obligan a que sus soluciones ya no sean números sino fórmulas, lo que ayuda a que los alumnos tomen conciencia desde el primer momento de la distancia que existe entre el quehacer algebraico y el aritmético.

Palabras clave: números enteros, iniciación al álgebra, educación secundaria, experiencias de aula, didáctica de las matemáticas.



1. El número entero en la educación secundaria obligatoria

1.1 La enseñanza a través de modelos concretos

En los textos escolares de los años 80 y 90 del pasado siglo, el número entero se presentaba en un ámbito aritmético, previo a la iniciación del álgebra, y su significado y operaciones se ligaba a modelos concretos de deudas y haberes, pérdidas y ganancias, puntuaciones positivas y negativas en un juego, fichas de dos colores, temperaturas, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, años antes y después de Cristo, movimientos de personas u objetos en uno u otro sentido, desplazamientos sobre la recta real, etc. Se suponía que estos modelos justificaban la necesidad del uso de los números enteros, daban cuenta de sus operaciones y propiedades y permitían reconstruirlas en caso de olvido.

1.2 Las críticas a los modelos concretos

Sin embargo, ya en aquella época y también posteriormente, aparecieron trabajos (Bell, 1986; Brousseau, 1983; Carraher, 1990; Cid, 2002, 2016; Freudenthal, 1973; Glaeser, 1981; González Marí, 1995; Whitacre et al., 2012) que ponían en duda las supuestas virtudes del uso de modelos concretos alegando que, incluso, podían suponer un obstáculo para una correcta comprensión del número entero y sus técnicas de uso.

Algunas de las críticas a la utilización de modelos concretos para introducir los números enteros se referían a la supuesta necesidad de dichos números para resolver problemas aritméticos en contextos de modelos concretos. La realidad es que el trabajo aritmético dentro de esos modelos concretos no necesita de los números enteros. Si nos dicen, por ejemplo, que a partir de un origen común un punto se desplaza 20 cm a la derecha sobre una recta y otro 30 cm a la izquierda, no necesitamos hacer la operación $(+20) - (-30) = (+20) + (+30) = 50$ cm para saber que la distancia entre los dos puntos es de 50 cm, basta con hacer $20 + 30 = 50$ cm. Del mismo modo, si en un juego perdemos 7 puntos y después ganamos 2, no necesitamos escribir $(-7) + (+2) = -5$ para saber que hemos perdido cinco puntos en



total. Basta con escribir $7 - 2 = 5$ y saber que el resultado son pérdidas porque estas son mayores que las ganancias.

La aritmética es un ámbito permanentemente contextualizado en el que las operaciones se efectúan una a una y vienen determinadas por el contexto. En estas condiciones, los números absolutos, los números sin signo, bastan y sobran para resolver cualquier problema, sin necesidad de introducir la complejidad simbólica que supone el trabajo con números positivos y negativos.

Otras críticas se referían a que los modelos concretos tampoco ayudaban a justificar las operaciones y propiedades de los números enteros ni a recordarlas en caso de olvido. Los modelos concretos parece que funcionan bien porque el docente sabe a dónde quiere ir, pero para los escolares pueden suponer un obstáculo. Un docente puede decir que $-5 < -2$ porque -5 grados es una temperatura más baja que -2 grados, pero un escolar puede pensar que a -5 grados hace más frío que a -2 grados y, por tanto, $-5 > -2$. Del mismo modo, un docente puede justificar, por ejemplo, que $(+50) + (-20) = +30$ porque si una persona tiene 50 € y debe 20 € su situación económica es de 30 € a su favor, pero un escolar puede pensar que ese razonamiento no tiene sentido porque, de hecho, en ese momento esa persona sigue teniendo 50 € para gastarlos en lo que quiera. Lo de pagar la deuda no deja de ser un futuroble.

Además, donde los modelos concretos hacen aguas definitivamente es en el intento de justificar el producto de números enteros. La razón última de esta dificultad (Cid, 2002) es que los modelos concretos *no se parecen* a una estructura con dos operaciones internas como es el caso de los números enteros, sino a una estructura con una operación interna y otra externa, como sucede en los espacios vectoriales, o a una estructura con dos operaciones externas, como sucede en el espacio afín. Una deuda o un desplazamiento, por ejemplo, se pueden duplicar o triplicar, es decir, se pueden multiplicar por un escalar, pero no se pueden multiplicar dos deudas o dos desplazamientos. Por eso, resulta tan complicado el intentar establecer una analogía entre el comportamiento de los modelos concretos y el del producto interno de números enteros.



1.3 El número entero en los textos escolares actuales

La mayor crítica, aunque no explícita, al uso de los modelos concretos la hicieron los libros de texto, probablemente influidos por los propios docentes, como lo muestra el hecho de que al florecimiento del uso de los modelos concretos para introducir los números enteros y sus operaciones propio de finales del siglo XX y comienzos del XXI, ha seguido una supresión casi total de los mismos. Actualmente, la mayor parte de los libros de texto usan los modelos concretos para introducir el número entero como resultado de una medida de magnitudes con dos sentidos o magnitudes relativas, pero con muy pocos intentos de utilizarlos para justificar las operaciones y propiedades de dichos números. Como mucho, se introduce la suma de enteros a partir de desplazamientos sobre la recta real o pérdidas y ganancias. En general, la enseñanza por medio de modelos concretos ha sido sustituida por una enseñanza memorística basada en la definición de valor absoluto para, a continuación, presentar las operaciones entre números enteros como operaciones entre valores absolutos, es decir, entre números naturales, con el añadido de reglas referidas a los signos ‘–’ o ‘+’ que preceden a los números.

Por consiguiente, ante el fracaso de los modelos concretos para justificar el número entero y sus operaciones, los textos escolares, con contadas excepciones, han renunciado a buscar una razón de ser de los números enteros que permita justificar su necesidad y dar sentido a sus operaciones y han optado por una enseñanza memorística. Pero las reglas son muchas y la memoria flaquea y, al cabo de un tiempo, nos encontramos con escolares que mezclan las reglas y hacen razonamientos como: $(-3) + (-6) = +9$ *porque 3 más 6 es 9 y – por – es más.*

2. La razón de ser histórica de los números negativos

La historia de los números negativos ha pasado bastante desapercibida. Han sido los trabajos de algunos investigadores en didáctica de las matemáticas o cercanos a ella (Brousseau, 1983; Cid, 2000, 2016; Gallardo, 2002; Glaeser, 1981; Lizcano, 1993; Schubring, 1986;) los que han puesto de manifiesto la conflictiva emergencia de los números negativos desde su primera aparición en el siglo III en forma de sustraendos hasta su aceptación como números a mediados del siglo XVIII.



Los números positivos y negativos no surgen en la historia de las matemáticas para resolver problemas aritméticos en un contexto de magnitudes con dos sentidos o magnitudes relativas. La primera vez que en el mundo occidental aparece una referencia a lo que hoy en día llamamos ‘número negativos’ es en la *Arithmetica* de Diofanto (siglo III d.C.). El libro es una colección de problemas aritméticos en los que el número desconocido que se busca, el *arithmos*, interviene en los razonamientos y las operaciones al mismo nivel que los datos conocidos. Se considera el texto fundacional del álgebra porque inicia las técnicas de cálculo algebraico y de resolución de ecuaciones.

Por supuesto, estamos ante un álgebra retórica, el simbolismo algebraico tardó muchos siglos en desarrollarse. Por ejemplo, Diofanto dice: *Si a 100 unidades le restamos 300 unidades menos 6 arithmos, resultan 6 arithmos menos 200 unidades*, donde nosotros escribimos: $100 - (300 - 6x) = 6x - 200$. Es en este contexto donde aparece por primera vez el enunciado del producto de números positivos y negativos: *Falta multiplicada por falta hace presencia, falta multiplicada por presencia hace falta*. ¿Y por qué necesita Diofanto establecer esta regla y qué significa?

Pues porque la aparición de la incógnita y su consideración como un objeto más que opera al mismo nivel que los números cambia completamente el sentido del cálculo. Si queremos simplificar la expresión $x - 7 + 5$ ya no nos sirve pensar que los signos ‘-’ y ‘+’ son signos que simbolizan operaciones binarias entre números naturales porque la imposibilidad de realizar la operación $x - 7$ nos impide proseguir. Va a ser necesario interpretar que, si a x le tenemos que restar 7 y después sumar 5, eso equivale a restarle 2 y, por tanto, $x - 7 + 5 = x - 2$. Es decir, nos vemos obligados a interpretar las operaciones binarias entre números naturales como composiciones entre sumandos y sustraendos, lo que más tarde desembocó en la suma de números positivos y negativos.

Del mismo modo, la existencia de sumas y restas que no pueden ser efectuadas obliga a desarrollar técnicas de cálculo entre términos que a su vez son operaciones indicadas. De ahí, la regla enunciada por Diofanto: si nos vemos en la necesidad de multiplicar dos diferencias, *falta multiplicada por falta hace presencia*, es decir, el



producto de los sustraendos de las diferencias, *lo que falta*, da lugar a un sumando, *una presencia*. Y esta regla, que se terminó convirtiendo en la regla multiplicativa de los signos, es fundamental porque garantiza que la propiedad distributiva se sigue cumpliendo, lo que permite las técnicas de desarrollo y factorización, absolutamente imprescindibles para la simplificación de las expresiones algebraicas.

Son, por tanto, las necesidades del cálculo algebraico las que fuerzan la sustitución de los números absolutos y sus operaciones por composiciones y productos de sumandos y sustraendos que, muchos siglos más tarde y después de muchas discusiones y dificultades se convirtieron en los números positivos y negativos.

Los modelos concretos son un dispositivo didáctico que sería perfectamente válido si pudiera sustituir a la razón de ser histórica de una forma creíble, ya que no es necesario que la génesis de los objetos matemáticos en el aula reproduzca la génesis histórica, y muchas veces ni siquiera es conveniente. Pero no son creíbles y además hay razones fundadas para suponer que pueden obstaculizar su comprensión. El número entero es el primer objeto de la enseñanza obligatoria de las matemáticas que surgió por razones internas de las matemáticas (Chevallard, 1990) y esto no se puede obviar con una pretendida modelización física de ese objeto y sus propiedades.

3. La iniciación al álgebra en la educación secundaria obligatoria

3.1 El álgebra en los textos de 1º de ESO

Una vez presentados los números enteros y los racionales positivos y negativos, los textos escolares de 1º de ESO suelen iniciar el álgebra haciendo una breve referencia a la necesidad de usar letras en vez de números para expresar propiedades aritméticas, fórmulas, relaciones entre magnitudes, términos generales, números desconocidos, etc. Introducen después el valor numérico de las letras o de las expresiones algebraicas y pasan a definir monomios y polinomios y algunas de sus operaciones. Siguen con la definición de igualdad, distinguiendo entre identidad y ecuación, y abordan después las técnicas de resolución de las ecuaciones de primer grado y la resolución de problemas aritméticos mediante ecuaciones. Últimamente,



los currículos oficiales de la educación secundaria obligatoria fomentan una visión funcional del álgebra, priorizando inicialmente la *variable* antes que la *incógnita*, lo que empieza a reflejarse en los libros de texto.

Ahora bien, en todo este proceso apenas hay referencias a que hemos entrado en un mundo nuevo, un mundo en el que los números, los signos de operaciones y relaciones y las letras ya no tienen los mismos significados o propiedades que tenían en aritmética. Y cuando se hace algún comentario que pone en relación la aritmética con el álgebra suele ser un comentario tranquilizador, un comentario donde se informa a los escolares de que la utilización de letras en los cálculos no supone cambios respecto a sus concepciones aritméticas sobre los números y sus operaciones.

3.2 Las críticas a la iniciación al álgebra dominante en los textos escolares

Esta iniciación escolar del álgebra, dominante en el sistema educativo y caracterizada por considerarla como una simple prolongación de la aritmética, ha sido cuestionada por diversos autores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Bosch, 2015; Chevallard, 1989, 1990; Gascón, 1993, 1994-95;) que ponen el énfasis en que las tareas escolares algebraicas habituales se reducen básicamente a la manipulación formal de expresiones y relaciones algebraicas, sin tener en cuenta que el álgebra es ante todo un instrumento de modelización de todas las matemáticas, ya que todas las ramas de las matemáticas se expresan en términos algebraicos, y no se puede separar el cálculo algebraico de las situaciones que modeliza.

Otros autores ponen de manifiesto las diferencias de significado y operacionales que sufren los objetos aritméticos al convertirse en objetos algebraicos (Cid, 2012; Kieran, 1980, 2004; Kieran y Filloy, 1989), lo que no casa bien con una enseñanza que no tiene en cuenta estas diferencias y transmite una concepción continuista del álgebra respecto a la aritmética.

4. Las diferencias entre aritmética y álgebra

El paso de la aritmética al álgebra cambia el sentido de los objetos aritméticos, en particular, el de los números y sus operaciones. En aritmética, un número natural es



el resultado de una medida, discreta o continua, y sus operaciones están ligadas a acciones físicas ejercidas sobre las cantidades de magnitud. Y así, sumar y multiplicar significan *aumentar* porque son operaciones ligadas a las acciones de añadir, reunir, añadir reiteradamente, etc., mientras que restar y dividir significan *disminuir* porque están ligadas a las acciones de quitar, separar, repartir, quitar reiteradamente, etc.

Esta concepción de las operaciones, que ha permitido a los escolares tener éxito en la resolución de problemas aritméticos durante muchos años, solo se ve modificada en algunos aspectos por la aparición de los números racionales positivos. Son números que también pueden justificarse como resultados de medidas de cantidades de magnitud, pero el sentido de la multiplicación y división de racionales positivos ya no es estrictamente el mismo que el de esas mismas operaciones entre números naturales. Sin embargo, el paso casi inmediato a la representación decimal refuerza de nuevo dicha concepción y únicamente la multiplicación o división por un número menor que uno la contradice. Y todos sabemos la dificultad que esto supone para los escolares.

En cambio, el trabajo algebraico obliga al uso de los números positivos y negativos y esto supone la modificación de las concepciones aritméticas sobre el número y sus operaciones. Ahora sumar y multiplicar ya no siempre es sinónimo de *aumentar* y restar y dividir no siempre significa *disminuir*; cero ya no significa *ausencia de cantidad de magnitud* y, por tanto, tiene sentido la existencia de números menores que cero; la resta, donde el minuendo tiene que ser mayor o igual que el sustraendo porque *de donde no hay no se puede sacar*, es sustituida por la diferencia, que será positiva o negativa según que el minuendo sea mayor o menor que el sustraendo.

Y a estos cambios en la manera de concebir los números y sus operaciones, hay que añadir otras muchas diferencias, algunas de las cuales señalamos a continuación:

- En aritmética, las letras son prioritariamente abreviaturas de unidades de medida o de objetos pertenecientes al contexto del problema. Por ejemplo, 5m suele significar 5 metros.



En el álgebra escolar, las letras de una expresión algebraica indican números descontextualizados que pueden ser variables, incógnitas, parámetros o constantes. Por ejemplo, $5m$ significa el producto de 5 por el número m , de momento sin determinar.

- En aritmética, el signo '=' indica prioritariamente que la operación situada a su izquierda debe ser efectuada y el resultado colocado a la derecha del signo.

En álgebra, el signo '=' establece una relación de equivalencia entre las expresiones situadas a izquierda y derecha del mismo.

- En aritmética, los signos '+' y '-' indican operaciones binarias entre números sin signo.

En las expresiones algebraicas, los signos '+' y '-' pueden indicar que un número es positivo o negativo (*sentido predicativo*) o una operación binaria entre números con signo o sin signo (*sentido operativo binario*). Además, el signo '-' también puede significar el opuesto de un elemento (*sentido operativo unario*).

- En aritmética, existen cuatro operaciones: suma, resta, multiplicación y división, que se simbolizan, respectivamente, mediante los signos: '+', '-', 'x', y '÷'.

En cambio, las operaciones algebraicas se reducen a dos: suma y producto. La resta se interpreta como suma con el opuesto y el cociente como producto por el inverso. En cuanto a los signos que indican las operaciones binarias de suma y producto, normalmente se suprimen. Por ejemplo, $-3-4$ indica la suma de -3 y -4 , mientras que $(-3)(-4)$ indica el producto.

- En aritmética, la igualdad y la desigualdad solo pueden tener dos valores de verdad: verdadera o falsa. Y es incorrecto escribir una igualdad o desigualdad falsa.

En álgebra, la igualdad y la desigualdad pueden ser verdaderas o falsas dependiendo de los valores que tomen las letras. Una igualdad o desigualdad se puede escribir independientemente de sus valores de verdad. Incluso es admisible escribir una igualdad o desigualdad que no se cumple para ningún valor de las letras. Basta con decir que es una ecuación o inecuación que no tiene solución.

- En la resolución aritmética de un problema, las operaciones se presentan de una en una y se suelen escribir por separado y el control de su validez es



semántico, está garantizado por el contexto del problema. Como consecuencia, las reglas de escritura que afectan a las operaciones son pocas y sencillas.

En cambio, en la resolución algebraica de un problema, las operaciones se ligan unas con otras, constituyendo una o varias expresiones o relaciones algebraicas que contienen operaciones combinadas que indican un programa de cálculo a seguir. La escritura algebraica de los programas de cálculo exige una sintaxis mucho más compleja, y un control también sintáctico, puesto que la fase de manipulación de expresiones o relaciones algebraicas es una fase descontextualizada y, por tanto, no se puede recurrir al contexto para garantizar su validez.

- En aritmética, las técnicas de cálculo son algorítmicas. Las operaciones entre números naturales, decimales o fracciones se llevan a cabo siguiendo unas pautas muy precisas que no exigen toma de decisiones.

En álgebra, las técnicas de cálculo no son algorítmicas, exigen reflexión y toma de decisiones y dependen en gran medida de la finalidad del cálculo. Se rigen, además, por principios de economía y funcionalidad.

5. La ruptura epistemológica entre aritmética y álgebra

El análisis de los modos de hacer aritmético y algebraico nos muestra que existen grandes diferencias entre uno y otro, hasta el punto de que se puede pensar que el inicio del álgebra escolar supone una ruptura con una tradición aritmética anterior que incluso se puede convertir en un obstáculo para la adquisición de los nuevos conocimientos algebraicos. Pero, esta ruptura, ¿es una ruptura epistemológica, es decir, se puede rastrear también en la historia de las matemáticas?

En efecto, la historia de las matemáticas nos muestra que la aritmética ha jugado un papel contradictorio en el desarrollo del álgebra (Cid, 2016). Desde luego, la estructura algebraica de sumandos y sustraendos, base de todo el cálculo algebraico, pudo ser establecida gracias al conocimiento de la estructura algebraica de los números absolutos y sus operaciones. Sin embargo, por otro lado, la dependencia de la aritmética obstaculizó durante siglos el paso a un álgebra abstracta y a la consideración de los sustraendos como números en igualdad de condiciones con los números positivos.



En un principio, el álgebra no es más que una técnica de resolución al servicio de la aritmética que permite afrontar problemas aritméticos desde un punto de vista numérico, en contraposición con la resolución geométrica propia de la matemática griega clásica. Posteriormente, el álgebra se convierte en un objeto de estudio (Al-Khwarizmi, *Hisab al-jabr wa'l-muqabalah*, siglo IX) y las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones se describen de manera sistemática y se intentan justificar mediante razonamientos deductivos.

A medida que el álgebra evoluciona, los problemas que afronta ya no están totalmente condicionados por la aritmética, ya que se está desarrollando también la modelización algebraica de la geometría, pero sigue interpretándose como una prolongación de la aritmética, como una *aritmética generalizada* y las soluciones de las ecuaciones tienen que tener sentido en el ámbito aritmético. Tienen que ser números y los sustraendos y sus raíces difícilmente pueden ser entendidos como números. Ahora bien, esto impide el establecimiento de una teoría general de ecuaciones y con el paso de los siglos se va haciendo cada vez más evidente la necesidad de admitir las soluciones negativas e imaginarias.

Fueron necesarias las rupturas epistemológicas que se produjeron en las matemáticas de finales del siglo XVIII y principios del XIX (De Lorenzo, 1977) para poder llegar a un álgebra totalmente independiente de la aritmética en la que las letras se refieren a objetos abstractos que no tienen por qué ser números y en la que se definen estructuras algebraicas que no tienen por qué responder a las estructuras algebraicas propias de la aritmética, lo que condujo al desarrollo del álgebra abstracta y a la proliferación de diversas estructuras algebraicas.

Esta nueva manera de entender las matemáticas permitió también una definición axiomática de los números (Hankel, *Vorlesungen uber die complexen Zahlen und ihre Functionen*, 1867), independiente de los procesos de medida y de la geometría euclídea, y sin referencias al mundo sensible, lo que supuso la aceptación definitiva de los números negativos e imaginarios y la fundamentación aritmética y algebraica del análisis y la geometría, abandonando el recurso a la *intuición geométrica*.



6. La secuencia didáctica de introducción al álgebra y al número entero en 1º de ESO

La secuencia didáctica que se presenta en este taller es el resultado de investigaciones realizadas a lo largo de varios años y descritas en diversos artículos (Cid, 2022; Cid y Ruiz-Munzón, 2011; Cid, Muñoz-Escolano y Ruiz-Munzón, 2020) y responde a los requerimientos planteados en los apartados anteriores. Ha sido experimentada en distintas ocasiones y situaciones por docentes e investigadores de diversos países. Actualmente, existe un grupo en Telegram llamado *De la aritmética al álgebra*⁴⁵, cuyo objetivo es crear una comunidad en torno a esta secuencia, dando pie a interacciones ricas de los docentes que la han llevado a la práctica o están interesados en ella. Además, hay referencias a dicha secuencia en el currículo aragonés de la educación secundaria obligatoria y se ha incorporado a propuestas editoriales recientes, como Math Bits.

6.1 Objetivos de la secuencia didáctica

- Poner de manifiesto la ruptura epistemológica que supone el paso de la aritmética al álgebra.
- Iniciar el álgebra sin el número entero, que se irá construyendo a medida que el cálculo algebraico lo necesite.
- Afrontar el cambio de significado de algunos objetos aritméticos al convertirse en objetos algebraicos.
- Familiarizar a los alumnos con los distintos objetos algebraicos antes de ser institucionalizados y de desarrollar sus técnicas de manejo.
- Introducir lentamente la escritura algebraica, sin darla por conocida.
- Introducir los principios de economía y funcionalidad en el cálculo algebraico.

6.2 Descripción de la secuencia didáctica

En una primera etapa se plantean problemas aritméticos que se resuelven mediante sumas y restas y en los que algunos datos son desconocidos y deben indicarse

⁴⁵ El enlace de invitación es: <https://t.me/joinchat/cvKQXoyDrfAwZjdk>



mediante letras. La necesidad de resolver los problemas aritméticos nos obliga a responder con una expresión algebraica y su simplificación nos exige pasar de las sumas y restas entre números absolutos a la composición de sumandos y sustraendos.

En la segunda etapa, se trabaja la diferencia como resultado de la acción de comparar frente a la resta como resultado de la acción de sustraer. Esto introduce las diferencias con signo según la relación de orden entre el primer y segundo término de la diferencia. Seguimos planteando problemas con datos desconocidos, lo que obliga a gestionar expresiones en las que el segundo término de la diferencia es, a su vez, una suma o diferencia. Se introduce el paréntesis como indicador de la longitud de un sustraendo y se reinterpreta el signo ‘-’ como signo *operativo unario* (signo que transforma un sumando en sustraendo y viceversa). Esto conduce a las reglas de supresión de paréntesis y permite establecer la equivalencia entre expresiones con paréntesis y sin paréntesis.

En la tercera etapa se incluyen problemas aritméticos en los que las expresiones algebraicas que los solucionan contienen productos en los que uno de los factores es a su vez una suma o diferencia. Se introduce el paréntesis como indicador de la longitud de un factor y se pone de manifiesto la importancia de la propiedad distributiva porque reduce el producto entre un número y una suma o diferencia a un producto entre sumandos y sustraendos, estableciéndose las reglas multiplicativas de los signos.

Finalmente, en la cuarta etapa aparecen los modelos concretos que se utilizan habitualmente en la introducción escolar del número entero, pero ahora con un tratamiento algebraico. La utilización de esos modelos en un contexto algebraico, en el que las reglas de cálculo con sumandos y sustraendos ya están establecidas, permite mostrar la gran ventaja que supone representar determinadas cantidades por medio de sumandos y sustraendos: la unificación de las fórmulas. Y esto conduce a la reinterpretación de los sumandos y los sustraendos como cantidades positivas y negativas y, a continuación, como nuevos números: los números enteros, y a la consolidación de un nuevo significado de los signos ‘+’ y ‘-’: su sentido *predicativo*.



A lo largo de estas etapas el escolar se va familiarizando con otros objetos algebraicos: expresión algebraica, valor numérico, fórmula, variable, función, incógnita, igualdad, desigualdad, ecuación, inecuación, etc., que se van introduciendo sin necesidad de hacer un tratamiento exhaustivo de sus técnicas de cálculo para favorecer, ante todo, la comprensión de su significado.

7. Desarrollo del taller

En el taller empezaremos presentando un cuestionario que contiene respuestas de los escolares a tareas algebraicas. El análisis de los errores de los escolares realizado por los asistentes al taller nos conducirá a la caracterización de la enseñanza del álgebra y los números enteros en los textos escolares y los efectos adversos que produce. Después presentaremos algunos hechos históricos que muestran las dificultades de los matemáticos a lo largo de la historia para llegar a la actual concepción sobre el álgebra y los números negativos. Finalizaremos presentando la secuencia didáctica y el diario de alguna de las sesiones en las que se puso en práctica para generar una discusión con los participantes al taller acerca de la pertinencia e interés de dicha secuencia y de sus posibles modificaciones.

8. Referencias

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.

Bosch, M. (2015). Doing research within the anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 51-69). Springer.



Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Carraher, T.N. (1990). Negative numbers without the minus sign. *Proceedings of the 14th International Conference of PME* (pp. 223-230). México.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège—Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín SI-IDM*, 10, 1-15.

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, vol. 2 (pp. 529-542). ICE de la Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2012). *Diferencias entre el quehacer algebraico y el quehacer aritmético*. Apuntes de clase. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

<https://zaguan.unizar.es/record/112529?ln=es>

Cid, E. (2022). La introducción escolar de los números enteros en un entorno algebraico: razones y principios que la sustentan. En R. Martínez y M.E. Ruiz (eds.), *Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros* (pp. 105-167). Educo. <https://bit.ly/3W8o0VB>



Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En: M. Bosch y otros (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview ATD* (pp. 579-604). Universidad Autónoma de Barcelona.

Cid, E., Muñoz-Escolano, J.M. y Ruiz-Munzón, N. (2020). Research on negative numbers in school algebra. En M. Bosch y otros (eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education. A Comprehensive Casebook* (pp. 61-76). Routledge.

De Lorenzo, J. (1977). *La matemática y el problema de su historia*. Editorial Tecnos.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13(3), 295-332.

Gascón, J. (1994-95). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x*, 37, 43-63.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

González Marí, J.L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs an operator symbol. *Proceedings of the fourth conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 163-169). Berkeley (California).



Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Kieran, C. y Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Editorial Gedisa.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x*, 12, 5-32.

Whitacre, I. et al. (2012). What sense do children make of negative dollars? *Proceedings of the 34th Annual Meeting of PME-NA* (pp. 958-964). Kalamazoo (Michigan).