Estrategias ante un problema que moviliza ideas sobre probabilidad condicional en la XXX Olimpiada aragonesa de 2.º ESO

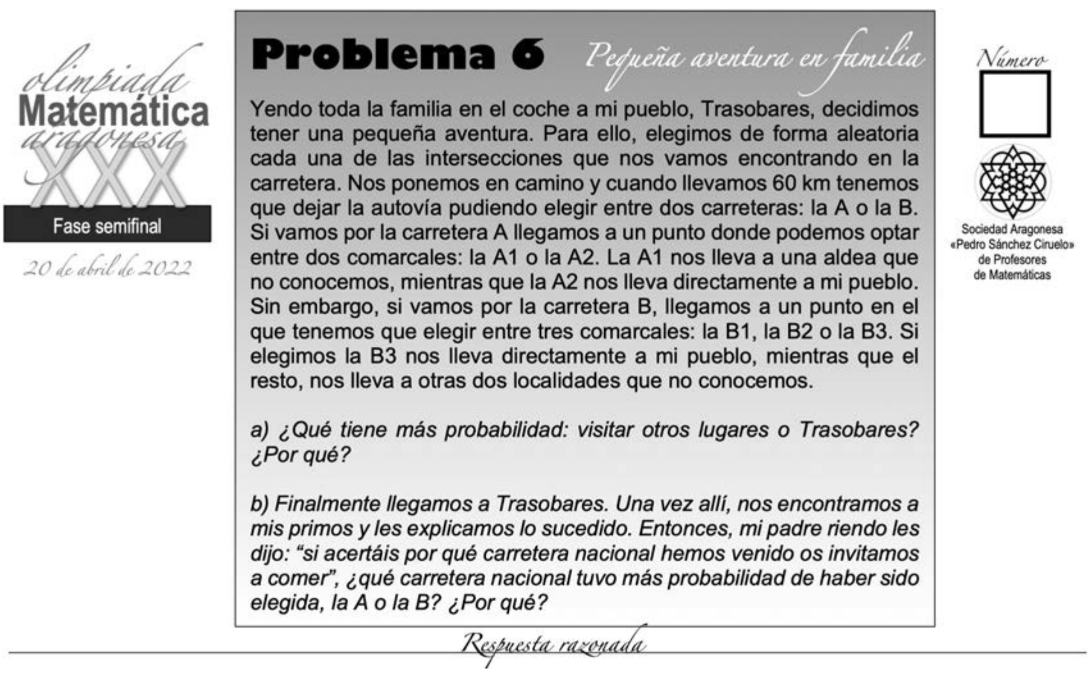
por

J. M. Rubio-Chueca, J. M.ª Muñoz-Escolano y Pablo Beltrán-Pellicer

(Universidad de Zaragoza)

Teniendo en cuenta la importancia de la probabilidad, sus significados y la dificultad en su enseñanza (Batanero, 2014; Borovcnick, 2012), en este artículo se lleva a cabo un análisis en la resolución de un problema de probabilidad condicional en la semifinal de la XXX Olimpiada Matemática Aragonesa. Los problemas de probabilidad no son muy comunes en las Olimpiadas Matemáticas de 2.º de ESO (Rubio-Chueca, Muñoz-Escolano y Beltrán-Pellicer, 2021) por lo que hay poca evidencia de cómo los estudiantes se desenvuelven en ellos. Mostramos el enunciado del problema y cómo es abordado por los diferentes participantes considerando diversas estrategias. Revisamos la red de significados acerca de la probabilidad que emergen en el proceso de resolución, el vocabulario y las representaciones usadas. En ese sentido, se observa cómo algunos participantes, al resolver el problema, ponen sobre la mesa ideas intuitivas de la probabilidad condicional y conjunta, en función de los sistemas de representación usados en el proceso.

El problema se propuso en la semifinal de la XXX Olimpiada Matemática de 2.º de ESO en Aragón y su enunciado es el siguiente:



olimpiada Matemática aragonesa XXX Fase semifinal

20 de abril de 2022

Problema 6 *Pequeña aventura en familia*

Yendo toda la familia en el coche a mi pueblo, Trasobares, decidimos tener una pequeña aventura. Para ello, elegimos de forma aleatoria cada una de las intersecciones que nos vamos encontrando en la carretera. Nos ponemos en camino y cuando llevamos 60 km tenemos que dejar la autovía pudiendo elegir entre dos carreteras: la A o la B. Si vamos por la carretera A llegamos a un punto donde podemos optar entre dos comarcales: la A1 o la A2. La A1 nos lleva a una aldea que no conocemos, mientras que la A2 nos lleva directamente a mi pueblo. Sin embargo, si vamos por la carretera B, llegamos a un punto en el que tenemos que elegir entre tres comarcales: la B1, la B2 o la B3. Si elegimos la B3 nos lleva directamente a mi pueblo, mientras que el resto, nos lleva a otras dos localidades que no conocemos.

a) ¿Qué tiene más probabilidad: visitar otros lugares o Trasobares? ¿Por qué?

b) Finalmente llegamos a Trasobares. Una vez allí, nos encontramos a mis primos y les explicamos lo sucedido. Entonces, mi padre riendo les dijo: "si acertáis por qué carretera nacional hemos venido os invitamos a comer", ¿qué carretera nacional tuvo más probabilidad de haber sido elegida, la A o la B? ¿Por qué?

Número

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Respuesta razonada

Contexto

En la fase semifinal de la XXX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO participaron 606 alumnos y alumnas de distintas localidades de Aragón. Esta fase semifinal de la olimpiada autonómica se llevó a cabo el sábado 20 de abril de 2022 en diecisiete sedes. En ella, se propusieron seis problemas durante dos sesiones de una hora cada una con un descanso entre cada sesión de media hora, sobre diferentes contenidos. Para su resolución estaba permitida la utilización de instrumentos de dibujo y calculadora. Goñi (2022) indica, de los seis problemas propuestos en la semifinal, el problema que analizamos fue en el que los participantes obtuvieron mayor puntuación y también presenta una posible resolución de este.

Estrategias en las respuestas correctas de los participantes a la primera cuestión

Recordemos que el apartado a) demandaba:

¿Qué tiene más probabilidad: visitar otros lugares o Trasobares?¿Por qué?

Clasificamos las respuestas correctas que hemos encontrado en dos grandes categorías atendiendo al razonamiento presente en las mismas, dependiendo de si hallan la probabilidad total o si únicamente comparan las probabilidades condicionales en cada carretera.

Razonamiento probabilístico hallando la probabilidad total desde un significado clásico

La resolución a dicho problema se puede llevar a cabo con un razonamiento probabilístico desde el significado clásico de la probabilidad teniendo en cuenta las probabilidades iniciales simples, condicionadas, finales conjuntas y la probabilidad total. Además, puesto que el enunciado del problema habla de aleatoriedad, pero no de equiprobabilidad, asumimos como resolutores la equiprobabilidad existente al llegar a cada una de las intersecciones y tengamos que elegir entre las diferentes carreteras.

En el análisis de las resoluciones del alumnado se contabilizan 55 participantes que utilizaron un razonamiento probabilístico usando la probabilidad total.

Es destacable que 47 de los participantes usaron algún tipo de representación diagramática, como el diagrama de árbol, para facilitar y buscar la estrategia adecuada.

En este caso (figura 1), el alumno, ayudado por la representación del diagrama de árbol, calcula cada una de las probabilidades implicadas en el problema obteniendo finalmente un resultado óptimo comparando las dos probabilidades: la de visitar otros lugares y la de ir a Trasobares.

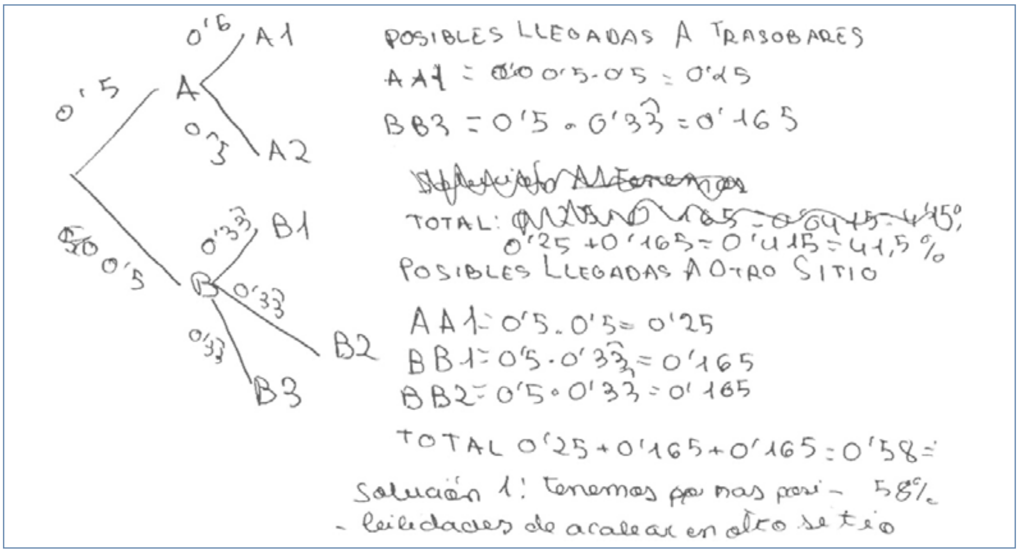


Figura 1. Estrategia del apartado a) teniendo en cuenta la probabilidad total usando un diagrama de árbol

De manera formal, en la resolución se aplica el teorema de la probabilidad total:

$$p(\text{Trasobares}) = p(A \cap A1) + p(B \cap B3) = p(A) \cdot p(A1 \mid A) + p(B) \cdot p(B3 \mid B) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}.$$

$$p(\text{Otros lugares}) = p(A \cap A2) + p(B \cap B1) + p(B \cap B2) = p(A) \cdot p(A2 \mid A) + p(B) \cdot p(B1 \mid B) + p(B) \cdot p(B2 \mid B) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{12}.$$

Esta utilización del diagrama de árbol (figura 1) para representar las diferentes probabilidades en sus ramas es un uso estándar que no se relaciona de forma directa con anteriores usos de los diagramas de árbol, como cuando se emplea para el conteo de colecciones de objetos. Intuimos que el alumnado que ha usado esta representación ha sido instruido en este tipo de problema.

Por otro lado, 8 de ellos dieron una solución correcta al problema sin emplear ningún tipo de representación diagramática (figura 2).

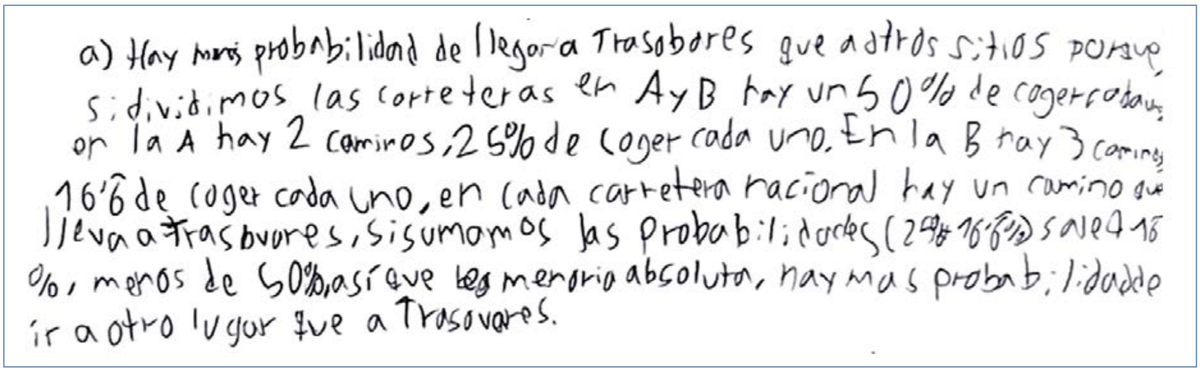

a) Hay más probabilidad de llegar a Trasobares que a otros sitios porque si dividimos las carreteras en A y B hay un 50% de coger cada una, en la A hay 2 caminos, 25% de coger cada uno. En la B hay 3 caminos 16'6̂ de coger cada uno, en cada carretera nacional hay un camino que lleva a Trasbvares, si sumamos las probabilidades (25%+16'6̂%) sale 41'6 %, menos de 50% así que es menoría absoluta, hay más probabilidad de ir a otro lugar que a Trasovares.

Figura 2. Estrategia del apartado a) teniendo en cuenta la probabilidad total sin usar ninguna representación

En esta ocasión, para dar la solución, el participante halla las probabilidades iniciales, conjuntas y la probabilidad total de llegar a Trasobares, observando que es menor que el 50%.

Razonamiento probabilístico comparando únicamente las probabilidades condicionales usando un significado clásico

Además de las respuestas anteriores, que siguen una estrategia más «escolar», en varias soluciones propuestas por el alumnado encontramos otra forma de resolver este problema. Así, la siguiente estrategia de resolución pasa por usar las probabilidades condicionadas teniendo en cuenta la equiprobabilidad al elegir los caminos en cada una de las intersecciones y que por las dos carreteras A o B podemos llegar al pueblo de Trasobares.

Un ejemplo sobre el razonamiento en que se apoya esta categoría es el siguiente: en la carretera A tenemos la misma probabilidad de ir al pueblo que a otros lugares y, por tanto, $p(A1 \mid A) = p(A2 \mid A)$ y, por tanto, por aquí dará igual a la hora de decantarnos por qué es lo más probable, y por otro lado, una vez que nos encontramos en la carretera B lo más probable es acabar en otro lado, $p(B3/B) < p((B1 \cup B2)/B)$. Así que, de la composición de ambas situaciones, es más probable ir a otros lugares que ir a Trasobares ya que, si de forma aleatoria decidimos ir por A, tenemos la misma probabilidad, pero, si decidimos ir por B, la probabilidad de llegar a otros lugares será el doble.

En este tipo de respuestas correctas, el alumnado también suele cuantificar la probabilidad de algunos de los sucesos, pero no calcula la probabilidad total, ya que no se le exigía en el enunciado del apartado, sino solo que comparase qué suceso era más probable.

El número de participantes que han resuelto esta parte del problema con un razonamiento probabilístico parecido es 33, sin necesitar para ello la probabilidad total.

Entre ellos, 14 también usan algún tipo de representación diagramática, como el diagrama de árbol, para apoyar su razonamiento. En este caso (figura 3), el participante calcula cada una de las probabilidades en porcentaje cuando llega a las intersecciones.

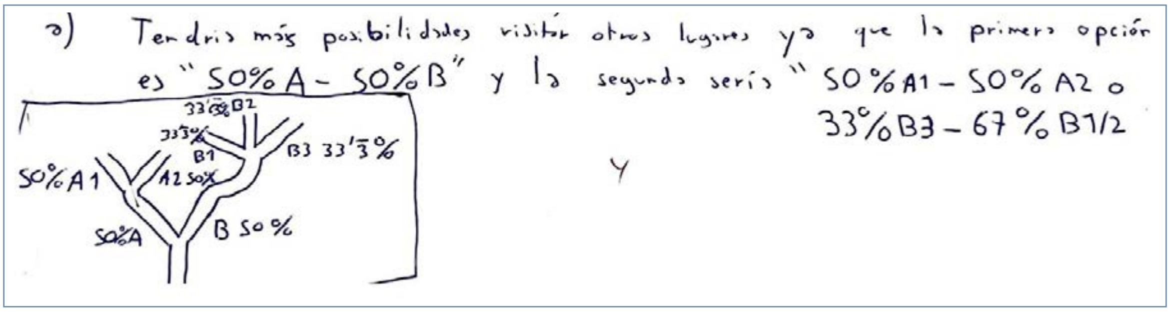


Figura 3. Estrategia del apartado a) sin tener en cuenta la probabilidad total usando un diagrama de árbol

Los 19 restantes no usaron ningún tipo de representación para visualizar la estrategia a seguir. Un ejemplo de esta forma se puede ver en la figura 4. En este caso concreto, el participante ha calculado únicamente las probabilidades condicionales, utilizando la comparación en cada caso para dar una respuesta bien argumentada.

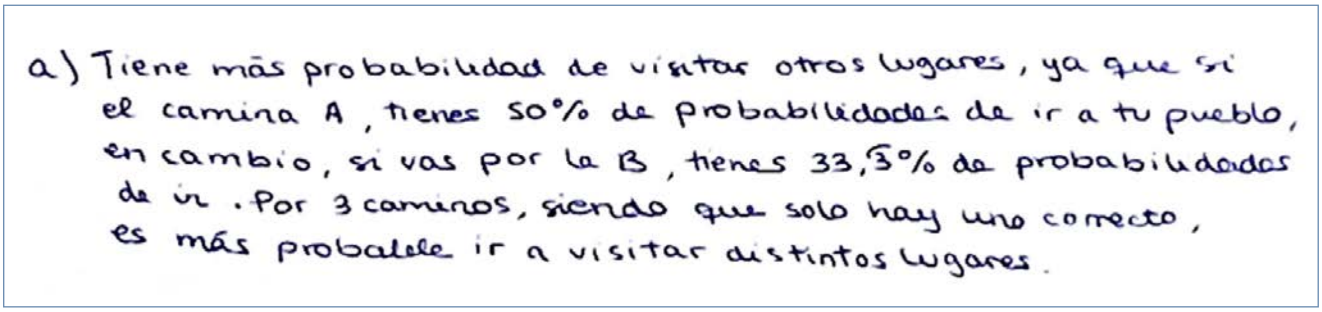


Figura 4. Estrategia del apartado a) sin tener en cuenta la probabilidad total y sin usar representaciones diagramáticas

Siguiendo un razonamiento similar, son destacables las producciones que han realizado ciertos participantes (figura 5) con errores en la argumentación final al determinar quién tiene mayor probabilidad.

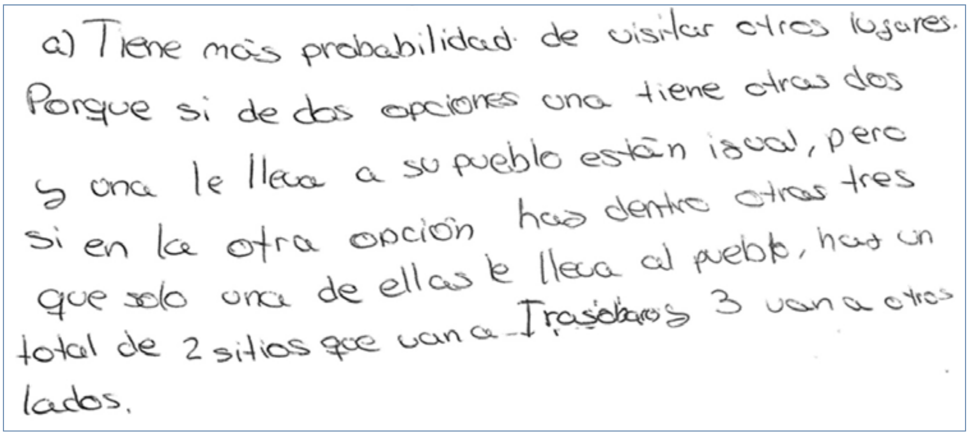


Figura 5. Estrategia del apartado a) sin tener en cuenta las probabilidades con error de argumentación (términos absolutos)

En estos casos, el resolutor hace alusión en términos absolutos a los caminos que nos llevan a cada lugar (2 carreteras nos llevan a Trasobares y 3 carreteras a otros lugares) estableciendo una equiprobabilidad inexistente en las cinco posibilidades.

El resolutor podría haber seguido un razonamiento verbal comparando en términos absolutos las posibilidades con un razonamiento intuitivo. Teniendo en cuenta a la hora de elegir las carreteras el número de posibilidades estableciendo una proporción, es decir, en términos probabilísticos, la existencia de equiprobabilidad en la elección de las determinadas carreteras en cada intersección ($p(A)=p(B)=1/2$, $p(A1\,|\,A)=p(A2\,|\,A)=1/2$, $p(B1\,|\,B)=p(B2\,|\,B)=$ $=p(B3\,|\,B)=1/3$) y sin necesidad de realizar ningún cálculo posterior, podemos determinar que tiene mayor probabilidad de haber llegado a otros lugares. Puesto que en la primera intersección nos encontramos con dos opciones (uno a uno, $1/1=1$), podemos concluir que ambas tienen la misma probabilidad. Ahora, de las dos opciones que podemos elegir yendo por A, una nos lleva a Trasobares y la otra a otros lugares (uno a uno, $1/1=1$) lo que nos hace concluir que ambas tienen igual probabilidad. Mientras, de las tres opciones que podemos elegir yendo por B: una lleva a Trasobares y las otras dos nos llevan a otros lugares (una a dos, $1/2<1$) lo que nos hace concluir que tiene mayor probabilidad otros lugares yendo por B. De esta manera podemos argumentar que tiene mayor probabilidad ir a otros lugares.

La tabla 1 muestra el número de participantes que utilizaron para resolver la primera parte del problema cada una de las diferentes estrategias mencionadas.

Estrategia utilizada apartado a)	*Número de participantes*
Calculando la probabilidad total con árbol	47
Calculando la probabilidad total sin árbol	8
Calculando las probabilidades condicionadas con árbol	14
Calculando las probabilidades condicionadas sin árbol	19

Tabla 1. Número de participantes que emplearon cada una de las estrategias correctas en el apartado a)

Estrategias en las respuestas correctas de los participantes a la segunda cuestión

El enunciado del apartado b) planteaba la siguiente cuestión:

> Finalmente llegamos a Trasobares. Una vez allí, nos encontramos a mis primos y les explicamos lo sucedido. Entonces, mi padre riendo les dijo: «si acertáis por qué carretera nacional hemos venido os invitamos a comer», ¿qué carretera nacional tuvo más probabilidad de haber sido elegida, la A o la B? ¿Por qué?

En este sentido, considerando para su resolución la probabilidad total y el teorema de Bayes usando un significado clásico vamos a calcular las probabilidades a posteriori:

$$p(A\,|\,\text{Trasobares})=\frac{p(A1\,|\,A)\cdot p(A)}{p(\text{Trasobares})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5};\qquad \simeq\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}4}=\frac{0{,}25}{0{,}4}=0{,}625=62{,}5\%.$$

$$p(B\,|\,\text{Trasobares})=\frac{p(B3\,|\,B)\cdot p(B)}{p(\text{Trasobares})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5};\qquad \simeq\frac{0{,}3\cdot 0{,}5}{0{,}4}=\frac{0{,}15}{0{,}4}=0{,}375=37{,}5\%.$$

Comparando ambas probabilidades concluimos que tiene más probabilidad de llegar al pueblo si finalmente hemos ido por la nacional A.

No es de extrañar, puesto que esta teoría pertenece a niveles superiores del currículo de segundo de secundaria, que ningún participante de la olimpiada, desarrollara su resolución utilizando dicho teorema. Sin embargo, muchos de ellos han dado soluciones de forma intuitiva cuya argumentación teórica se fundamenta en dicha teoría al asumir la equiprobabilidad y comparar probabilidades.

Veamos ahora las respuestas dadas por el alumnado participante:

Razonamiento probabilístico comparando las probabilidades condicionadas con un significado clásico

Considerando la equiprobabilidad de elegir las determinadas carreteras en las intersecciones y comparando las probabilidades condicionales a priori (llegar a Trasobares una vez elegida la carretera nacional A y llegar a Trasobares una vez elegida la carretera nacional B) se puede argumentar la solución, puesto que las probabilidades a posteriori que nos piden comparar vienen dadas por las expresiones:

$$p(A\,|\,\text{Trasobares}) = \frac{p(A1\,|\,A)\cdot p(A)}{p(\text{Trasobares})} \quad \text{y} \quad p(B\,|\,\text{Trasobares}) = \frac{p(B3\,|\,B)\cdot p(B)}{p(\text{Trasobares})}.$$

Luego compararemos $p(A1\,|A) = 1/2 = 0{,}5 = 50\,\%$ y $p(B3\,|\,B) = 1/3 \approx 0{,}3 = 30\,\%$ ya que $p(A) = p(B) = 1/2$ (asumiendo la equiprobabilidad cuando elegimos la carretera A o B).

En este sentido, han sido cinco los estudiantes los que han usado una estrategia similar para dar solución al problema (figura 6).

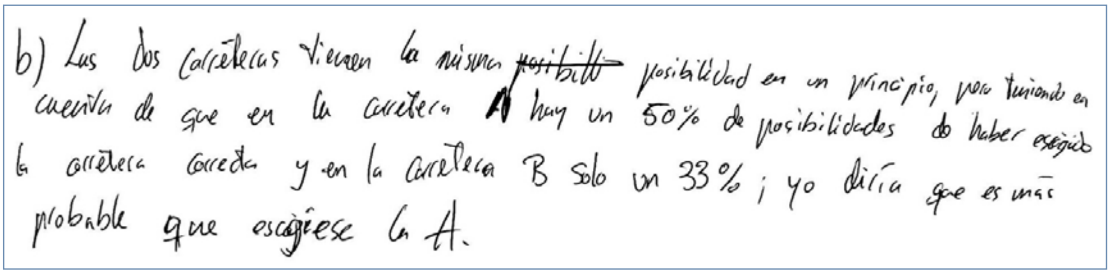

b) Las dos carreteras tienen la misma ~~posibili~~ posibilidad en un principio, pero teniendo en cuenta de que en la carretera A hay un 50% de posibilidades de haber escogido la carretera correcta y en la carretera B solo un 33%; yo diría que es más probable que escogiese la A.

Figura 6. Estrategia del apartado b) sin tener en cuenta la equiprobabilidad y las probabilidades condicionadas

Razonamiento probabilístico comparando las probabilidades conjuntas con un significado clásico

En esta ocasión tenemos:

$$p(A\,|\,\text{Trasobares}) = \frac{p(A1\,|\,A)\cdot p(A)}{p(\text{Trasobares})} = \frac{p(A\cap A1)}{p(\text{Trasobares})}.$$

$$p(B\,|\,\text{Trasobares}) = \frac{p(B3\,|\,B)\cdot p(B)}{p(\text{Trasobares})} = \frac{p(B\cap B3)}{p(\text{Trasobares})}.$$

Luego comparando las probabilidades conjuntas: $p(A\cap A1)$ y $p(B3\cap B)$ daremos la respuesta correcta.

En este caso, el número de alumnos que han resuelto el apartado b) de forma similar es de diecisiete (figura 7).

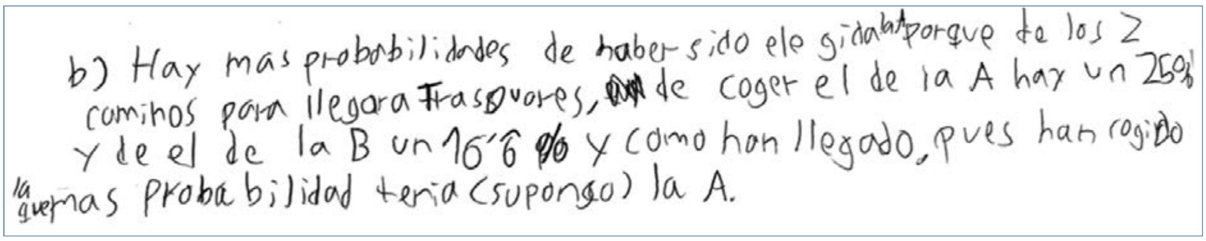

b) Hay mas probabilidades de haber sido elegida porque de los 2 caminos para llegar a Trasovares, de coger el de la A hay un 25% y de el de la B un 16'6 % y como han llegado, pues han cogido la que mas probabilidad tenía (supongo) la A.

Figura 7. Estrategia del apartado b) teniendo en cuenta las probabilidades conjuntas

En la misma línea de argumentación, se podría hacer una razonamiento verbal sin usar las probabilidades, comparando en términos absolutos las posibilidades con un significado más intuitivo. En ese aspecto, teniendo en cuenta a la hora de elegir las carreteras el número de posibilidades estableciendo una proporción, es decir, en términos probabilísticos, la existencia de equiprobabilidad en la elección de las determinadas carreteras en cada intersección y sin necesidad de realizar ningún cálculo posterior, podemos determinar que tiene mayor probabilidad de haber sido elegida la opción *A*. Ya que, de las dos opciones que podemos elegir yendo por *A*: una nos lleva a Trasobares y la otra a otros lugares. Mientras que de las tres opciones que podemos elegir yendo por *B*: una lleva a Trasobares y las otras dos nos llevan a otros lugares.

En la tabla 2 se identifica el número de participantes que concluyeron el apartado b) del problema argumentando sus soluciones con las estrategias mencionadas.

Estrategia utilizada apartado b)	*Número de participantes*
Calculando las probabilidades condicionadas y equiprobabilidad en los sucesos	5
Calculando las probabilidades conjuntas	17

Tabla 2. Número de participantes que emplearon cada una de las estrategias correctas en el apartado b)

Conclusiones

Muchos estudiantes de 2.º ESO son capaces de resolver alguno de los apartados (tablas 1 y 2). Esto sucede a pesar de que muchos de ellos no han sido instruidos sobre las técnicas específicas para resolver problemas de probabilidad condicionada, que aparecerán curricularmente en 3.º o 4.º ESO (probabilidad condicionada, probabilidad total, Bayes…) y que convierten este problema en un ejercicio (Blanco y Pino, 2015).

En el análisis aparecen variadas respuestas que denotan distintos razonamientos o modos de abordar la situación, más allá de aplicar la resolución «escolar» de la tarea. La argumentación matemática subyacente en estas justificaciones es rica y provechosa, puesto que aborda la resolución de los apartados articulando diferentes objetos matemáticos (proposiciones, lenguajes, propiedades y representaciones) referidos a la probabilidad.

Creemos que el enunciado de la tarea promueve la aparición de distintos razonamientos y modos de abordar el problema ya que, por un lado, los datos permiten que se pueda abordar la situación de manera sencilla (dos ramas y tres ramas, equiprobabilidad en cada rama…) con herramientas elementales y, sobre todo, porque la exigencia del problema no está en calcular una probabilidad concreta de un suceso sino en tomar una decisión razonada sobre qué suceso es más probable.

Por otro lado, tras la revisión y detección de las estrategias correctas, queda claro que en las situaciones de aprendizaje sobre la probabilidad condicionada que se puedan plantear en 4.º ESO o en 1.º de Bachillerato, sería necesario incluir tareas específicas del tipo en las que la suma de los caminos en términos absolutos contraríen el análisis anterior de las probabilidades condicionadas puesto que es una estrategia no correcta que emerge de manera natural en las respuestas de estudiantes de 2.º de ESO. Por ejemplo, una vez afrontada la tarea propuesta en la olimpiada, plantear otra similar, pero con dos nacionales *A* y *B*, con *A*: 2 al pueblo y 1 a otros lugares, *B*: 2 al pueblo y 3 a otros lugares.

Por último, entendemos que es importante plantear una tarea como la estudiada también en 2.º y 3.º ESO para el desarrollo de los saberes estocásticos en la docencia habitual en clase. Precisamos que cuando promovemos su uso de forma habitual en el aula, no lo hacemos con la finalidad de instruir a los estudiantes en las técnicas de resolución de las mismas para que estas tareas sean resueltas cual ejercicio y así ganar una competición matemática extraescolar como la olimpiada. Ni siquiera con una posible finalidad de aprovechar y adelantar la introducción de dichas técnicas antes de lo que dice el currículo. Más bien, nuestra recomendación va dirigida a que los estudiantes se acostumbren a abordar la resolución de ese tipo de situaciones de probabilidad condicionada (más complejas) poniendo en juego su razonamiento probabilístico y las técnicas más elementales que disponen hasta el momento. Además, entendemos que estas tareas con distintas aproximaciones sirven para atender a la diversidad que nos podemos encontrar en el aula amparando todas las casuísticas reconocidas.

Finalmente, animamos a que, a través de su implementación en el aula, el profesorado fomente la participación de su alumnado en esta actividad, la olimpiada matemática de segundo, no con un propósito competitivo, sino para ofrecerles una experiencia matemática agradable fuera del contexto habitual, que permita al alumnado mejorar las actitudes hacia la matemática y adquirir creencias positivas hacia la misma.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00/AEI/10.13039/50110001103, con apoyo del grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2014), «Probability teaching and learning», en S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer.

Blanco L. J., y J. Pino (2015), «¿Qué entendemos por problema de matemáticas?», en: L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (eds.), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria*, Universidad de Extremadura, 81-92.

Borovcnick, M. (2012), «Multiple perspectives on the concept of conditional probability», *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5–27.

Goñi, M. (2022), «XXX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º ESO», *Entorno Abierto*, 47, 1–5.

Rubio-Chueca, J. M., J. M. Muñoz-Escolano y P. Beltrán-Pellicer (2021), «La probabilidad en problemas de Olimpiadas matemáticas de secundaria en España», *Contextos Educativos*, 28, 29-50.