
EDUCACIÓN

Sección a cargo de

Luis J. Rodríguez-Muñiz

Sobre la regla de tres y la proporcionalidad aritmética

por

**Sergio Martínez-Juste, Antonio M. Oller-Marcén,
José M. Muñoz-Escolano y Pablo Beltrán-Pellicer**

A raíz de la reciente reforma curricular en España, algunos medios de comunicación y administraciones educativas han puesto el foco de atención en la regla de tres, como ejemplo de una supuesta reducción de contenidos que desemboca en un desprecio por el conocimiento. Si bien una característica de los nuevos currículos [37, 38] es su apuesta por un enfoque competencial, que conlleva la eliminación de ciertos contenidos, primando los procesos, esto no implica ese desprecio por el saber. Más bien al contrario, se trata de que los aprendizajes sean significativos, duraderos y transferibles.

No pretendemos con esta introducción blindar los nuevos currículos ante toda crítica, sino hacernos eco del populismo que subyace a señalar la desaparición de la regla de tres del currículo de Primaria como una hecatombe educativa. En efecto, se trata de una regla muy conocida y no es raro que una persona la señale como lo único útil que aprendió en las matemáticas escolares. No nos llevemos a engaño; esta utilidad, como veremos, reside fundamentalmente en el campo de situaciones en las que puede aplicarse, muy relacionadas con la vida cotidiana: recetas de cocina, descuentos, etc.

Fernández Lajusticia y Puig realizaron ya en esta *Gaceta* un análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad en el que no aparece mencionada la regla de tres [18]. Esto no resulta sorprendente en absoluto, es la simple constatación de que no es un elemento esencial de la proporcionalidad. Es una técnica que sirve para resolver un tipo de situación concreta de proporcionalidad (los problemas de valor perdido), dentro del universo fenomenológico. Una técnica que, además, genera obstáculos de aprendizaje y que es contraria a lo que debería hacerse en clase de matemáticas: abstraer el objeto matemático a partir de la fenomenología en cuestión. La proporcionalidad es una vieja conocida de la didáctica de la matemática y quizá por eso ha sido empleada en investigaciones sobre los conocimientos

y las competencias del profesorado, tanto en formación como en ejercicio. En la *Gaceta* nos encontramos también con el artículo de Llinares y Fernández [29], quienes consideran la proporcionalidad, junto a otros objetos, para desgranar la competencia docente «mirar profesionalmente» (*professional noticing*).

Somos conscientes de que no todos entendemos lo mismo por el término «regla de tres». Por tanto, en primer lugar conviene definir a qué nos estamos refiriendo cuando lo utilizamos. De esta forma, el artículo comienza con una revisión de la regla de tres desde una perspectiva histórica. Posteriormente, centramos nuestra atención en otros posibles métodos para resolver problemas de valor perdido, tanto presentes actualmente en los libros de texto como utilizados por los estudiantes. Esto permite identificar ciertos obstáculos que originan algunas aproximaciones al objeto de la proporcionalidad aritmética, lo que dará paso a una sección final donde exponemos algunas ideas sobre la enseñanza de la proporcionalidad más allá de la regla de tres.

1. LA REGLA DE TRES DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA

A finales del siglo XVI, Bernat Vila, un «mestre de escriure y comptar» de la ciudad de Barcelona, escribía lo siguiente en sus *Reglas brevs de Arithmetica* [57, f. 79v]¹:

Es tanta la excelencia y grandeza de esta regla de tres que los aritméticos prácticos le dan (con gran razón) mil epítetos y alabanzas. Dicen que es la más principal, la más provechosa, la más necesaria, la más utilizada en tratos, negocios y mercaderías, la más estimada y alabada por todos. Que es regla única y general, que es regla dorada que excede a todas las otras, así como el oro finísimo de veinticuatro quilates aventaja y excede a todos los otros metales. Que es el fin y la culminación de todas las operaciones de los números. . .

Estas palabras pueden parecer exageradas, pero lo cierto es que reflejan de forma bastante fiel el sentimiento generalizado de que la aplicación de esa denominada regla de tres permitía de un modo u otro resolver cualquier problema aritmético. Para saber a qué se refería Vila al hablar de la regla de tres, podemos recurrir al texto matemático impreso en Europa más antiguo que se conserva: la *Aritmética de Treviso* (un texto anónimo titulado realmente *arte de labaccho* y publicado en 1478). Allí encontramos la siguiente descripción [3, pp. 59–60]:

La regla de las tres cosas es esta. Que tú debes multiplicar la cosa que quieres saber con aquella que no tiene semejante, y partir por la otra. Y el resultado que se obtendrá será de la misma naturaleza que la cosa que tiene semejante.

El origen de esta regla es muy antiguo. Así, en el *Papiro de Rhind* ya se encuentran problemas resueltos mediante la aplicación de secuencias de operaciones que responden al esquema anterior. Sin embargo, la primera descripción de esta regla en

¹Todas las traducciones son propias. Cuando ha sido necesario, se ha modernizado la ortografía y la sintaxis (excepto en los títulos).

términos explícitos la encontramos en el *Jiuzhang suanshu* chino; en concreto en el capítulo dedicado al intercambio de distintos tipos de granos cuyos «precios» (*lü*) son dados². El procedimiento se describe del siguiente modo [10, p. 225]:

Se multiplica, por la cantidad de aquello que tenemos (*shu*), la *lü* de aquello que estamos buscando para así obtener el dividendo. Se toma la *lü* de aquello que tenemos como divisor.

A pesar de que el procedimiento se introduce y se describe en un contexto muy particular, el comentarista Liu Hui añade la siguiente anotación, que resulta tremendamente ilustrativa [10, p. 224]:

Este es un procedimiento universal. En el conjunto de las nueve partes de las matemáticas que dan su título a los capítulos podemos aplicar de manera general las *lü*, lo que llamamos «estar informado del pasado y conocer el futuro» [...] así, en última instancia, no hay nada que no se convierta en este procedimiento.

Así pues, podemos decir que la sistematización y la aplicación general del procedimiento que hoy llamamos regla de tres es probablemente una aportación china. Este procedimiento comenzaría entonces un viaje progresivo hacia occidente, siendo recogido en primer lugar por la cultura hindú; si bien no es descartable que la sistematización de la regla de tres surgiera en la cultura hindú de forma independiente. Sea como sea, los matemáticos del mundo árabe medieval encontraron aparentemente la regla de tres por primera vez en textos hindúes. De hecho [5], el persa Al Bīrūnī escribió un tratado titulado *Fi raśikat al-Hind* (*rāśika* de los hindúes) dedicado específicamente a la regla de tres (*trairāśika*).

Como hemos dicho, el ámbito de aplicación de la regla de tres ya desde su aparición excedió el de los intercambios comerciales. Pese a ello, este siempre ocupó un lugar especialmente significativo. Por ejemplo, al-Khwārizmī incluye en su *Álgebra* (*al-Kitāb al-Mukhtasar fī Hisāb al-Jabr wal-Muqābalah*) del siglo IX un capítulo dedicado a «transacciones mercantiles» en el que se lee lo siguiente [46, pp. 68–69]:

Sabemos que todas las transacciones mercantiles entre personas, como comprar y vender, intercambiar y contratar, siempre involucran dos nociones y cuatro números que son presentados por aquel que pregunta: medida y precio, cantidad y suma. La medida se relaciona con la suma y el precio con la cantidad. Tres de esos cuatro números siempre son conocidos y el otro desconocido [...] El cálculo en estas situaciones es así. Dados los tres números, dos de ellos están relacionados entre sí. Entonces, multiplica estos números relacionados y divide el producto por el tercer número, que es el relacionado con el valor desconocido. El cociente de esa división es el número desconocido [...] De esta forma se resuelven todos los cálculos que importan en los negocios.

La vinculación especial con los contextos comerciales se mantuvo en el viaje de la regla de tres hacia el occidente europeo. Leonardo de Pisa (Fibonacci) introduce

²Sobre la problemática al respecto del significado y de la traducción del término *lü* ver [9, pp. 424–425].

la regla de tres en el *Liber Abaci* (1202) en un capítulo dedicado a «encontrar el valor de mercancías mediante el método principal» [49, p. 27]. Del mismo modo, Luca Pacioli titula la sección de su *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* dedicada a la introducción de la regla de tres como *De regula trium rerum qua mediante omnes mercatorie questiones solvuntur* [42, f. 57r]. Hasta tal punto es así que en su *Cõpendiõ de lo abaco* (escrito en occitano y publicado en Turín en 1492), el nizado Frances Pellos escribía lo siguiente en su descripción de la regla de tres [43, f. 36r]:

El primer número es causa comprada o vendida [...] el segundo número es siempre el valor por el cual has comprado o vendido [...] el tercer número siempre debe ser la causa que quieres saber.

En cualquier caso, las aplicaciones de la regla de tres iban mucho más allá de estas situaciones de compra-venta. Con el paso del tiempo la extensión de su uso en situaciones cada vez más variadas y complejas hizo que se introdujeran múltiples distinciones y clasificaciones orientadas posiblemente a facilitar la memorización de los distintos procedimientos necesarios. Así, entre los siglos XV y XVIII es común encontrar en los textos dedicados a la aritmética la distinción entre regla de tres legítima y bastarda, directa e inversa, simple y compuesta, con tiempo y sin tiempo; así como sus distintas combinaciones.

En el proceso de transmisión de la regla de tres que estamos relatando, los matemáticos árabes medievales, al igual que en otros ámbitos científicos, hicieron de nexo de unión entre las culturas orientales y la tradición griega. No es de extrañar entonces que observaran y plasmaran por escrito la evidente relación entre esa regla de tres de los hindúes, que tantos problemas prácticos permitía resolver, y los conceptos abstractos sobre proporcionalidad presentes, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides. De este modo, se trataba de otorgar un cierto rigor a estos procedimientos prácticos [41]. Esta fusión, no exenta de problemas, quedó plasmada en prácticamente la totalidad de las obras aritméticas publicadas en Europa. Por ejemplo, Juan Pérez de Moya indica en su *Arithmetica practica y speculatiua* que «La razón de lo cual [se refiere al procedimiento de la regla de tres] consta por la decimonona [proposición] del [libro] séptimo de Euclides» [44, pp. 225–226]. En Inglaterra, Leonard Digges escribía en su *Stratitoticos*: «La demostración de esta Regla está fundamentada en la Proposición 19 del libro séptimo de los Elementos de Geometría» [15, p. 29].

Incluso en aquellos textos que no mencionaban explícitamente a Euclides, la terminología propia de la proporcionalidad era utilizada con mucha frecuencia de forma que la regla de tres se describía y explicaba haciendo uso de la idea de razón, del concepto de cantidades proporcionales, etc. Entrando ya en el siglo XVIII, por ejemplo, leemos lo siguiente en la *Arithmetica demonstrada theorico-practica* del valenciano Juan Bautista Corachán [13, p. 200]:

Regla de proporción es la que enseña el modo de hallar un número incógnito por la proporción que tiene con algunos conocidos, los cuales porque son tres se dice regla de tres, y también de Oro, por la grande utilidad que trae [...] La regla de tres simple es la que por solos tres números dados o conocidos enseña a hallar un cuarto número proporcional, como

en esta cuestión. Un oficial en 4 meses gana 20 libras, ¿cuánto ganará el mismo en 8 meses? En donde son conocidos tres números y se busca la ganancia correspondiente a los 8 meses [...] han de tener la misma razón los 4 meses a la ganancia 20 libras, que los 8 meses a la ganancia que se busca.

Posteriormente, como culminación de un progresivo proceso de aritmetización, se produjo una cierta identificación o equiparación entre los conceptos de razón y fracción. Esto, junto con el uso del lenguaje simbólico, provocó que el procedimiento mecánico que constituía tradicionalmente la regla de tres pudiese expresarse en términos de la igualdad de dos razones, de su denominada «propiedad fundamental» y de los métodos para hallar medios o extremos proporcionales. La imagen de la figura 1, que proviene de los *Principios de Matemática* de Benito Bails, ilustra esta clara evolución.

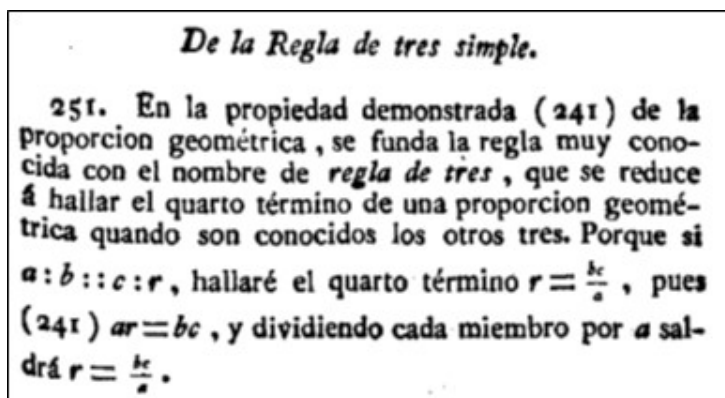


Figura 1: La regla de tres a finales del siglo XVIII [6, p. 129].

Con este enfoque, diríamos más moderno, se evitaba tener que presentar el procedimiento de la regla de tres de modo meramente memorístico que descansaba en una serie de «ritos» [22] relacionados con la disposición de los datos, los nombres asignados a los valores, etc. Sin embargo, este tipo de aproximación no resultaba conveniente en la instrucción elemental, en la que los alumnos no disponían de las herramientas conceptuales correspondientes. En consecuencia, el procedimiento clásico seguía presente en un buen número de textos, incluso en aquellos de un nivel más alto, puesto que, aunque se presentase un discurso similar al de la figura 1, no era infrecuente que finalmente el autor optara por presentar el proceso mecánico tradicional.

Ahora bien, aunque la relación entre las operaciones efectuadas en el proceso tradicional de la regla de tres y las propiedades de las cantidades proporcionales es matemáticamente evidente, también es cierto que estas operaciones admiten una interpretación en términos puramente aritméticos, atendiendo únicamente a los significados de la multiplicación y de la división. El fragmento de la figura 2 recoge

claramente esta idea. Proviene de un texto de pedagogía de la primera mitad del siglo XIX. Nótese que el autor comete un error en el último paso, ya que multiplica en lugar de dividir, que sería la operación necesaria para resolver el problema correctamente.

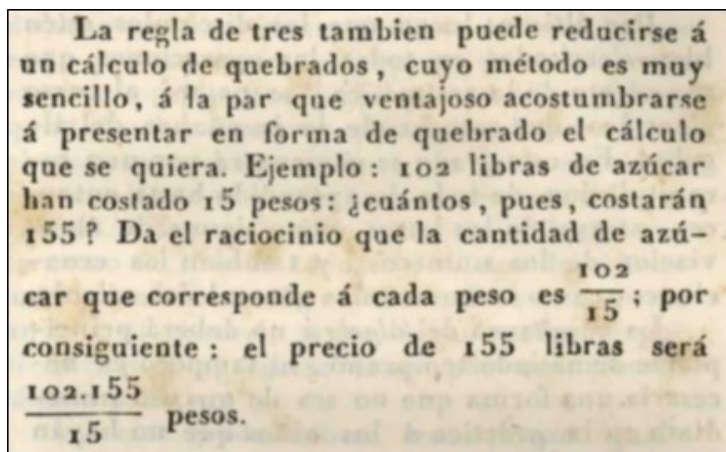


Figura 2: Uso del significado de las operaciones [48, p. 89].

Ya entrados en el siglo XX, José María Eyaralar, licenciado en Ciencias por la Universidad de Zaragoza en 1912, becado por la Junta de Ampliación de Estudios (1922) para formarse en Francia, profesor de Matemáticas y de Metodología de las Matemáticas en la Escuela Normal de Barcelona, y finalmente encarcelado y purgado durante el franquismo, transmitía esta idea de modo más académico [16, p. 387]:

Opinamos que no se debe hablar al alumno de la proporcionalidad numérica ni de su aplicación inmediata, la regla de tres, como suele darse. Con ello se le descarga de un bagaje no solo inútil sino perjudicial. Inútil desde el punto de vista práctico, porque el medio verdadero de resolver los problemas de reglas de tres es el empleo *del coeficiente* [en cursiva en el original]. Perjudicial, porque conduce la rutina de las reglas de tres, sacadas maquinalmente con perjuicio de la educación intelectual.

Ahora, tras varios miles de años de historia y evolución se ha producido una especie de metonimia en lo que se refiere al término «regla de tres». Inicialmente, la regla de tres hacía referencia unívocamente a una serie de operaciones mecánicas conducentes a obtener la solución de un determinado problema (de ahí la denominación de regla). La incorporación de conceptos abstractos (razones y proporciones), el uso de nuevos sistemas de representación (notación fraccionaria, simbolismo algebraico) o el recurso a los significados de las operaciones en una búsqueda de mayor sencillez supusieron la progresiva aparición de distintas estrategias de resolución para una misma familia de problemas. Desde un punto de vista técnico, en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas nos referimos a este tipo de problemas como problemas de valor perdido, o faltante, en situaciones de proporcionalidad [14].

En la cita anterior de Eyaralar se habla de «problemas de regla de tres». Actualmente, al menos en los libros de texto, no es habitual encontrar dicha expresión, ya que esta identificación entre el método de resolución y el tipo de problemas en que se aplica podría llevar a pensar que ese es el único o el mejor método para resolverlos. Sin embargo, sí es habitual encontrar expresiones como la siguiente [2, p. 151]:

La regla de tres simple directa es un procedimiento para hallar una cantidad desconocida que forma proporción con otras cantidades conocidas, correspondientes a dos magnitudes directamente proporcionales.

Esta supuesta definición es claramente insatisfactoria puesto que, como hemos visto, son múltiples los métodos que permiten hallar esa cantidad desconocida. Es decir, con esta idea, cualquier método de resolución de problemas de valor perdido podría considerarse una regla de tres; provocándose una evidente confusión.

Así pues, pensamos que el enfoque adecuado consiste en considerar que la regla de tres es solo uno de los distintos métodos posibles que existen para resolver problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad. En particular, se trata del método más antiguo desde el punto de vista histórico; consistente en aplicar de manera algorítmica, mecanizada y sin justificación una fórmula (es decir, una serie de operaciones con los datos) que varía en función de si estamos en una situación de proporcionalidad directa, inversa, simple, compuesta, etc. La figura 3 ilustra la presencia ya en el siglo XXI de lo que nosotros consideramos como regla de tres.

Para resolver problemas con proporciones tradicionalmente se ha utilizado la **regla de tres simple directa**.

8 limones	—	2 litros	}
x limones	—	6 litros	

$$x = \frac{8 \cdot 6}{2} \rightarrow x = 24$$

Figura 3: Regla de tres en el siglo XXI [58, p. 142].

2. OTRAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALOR PERDIDO

En la sección anterior hemos presentado el método que denominamos regla de tres. En este apartado mostramos distintas estrategias para resolver problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (una discusión similar, con las adaptaciones necesarias, sería posible para la proporcionalidad simple

inversa, así como para la proporcionalidad compuesta [35]). Estos problemas pueden englobarse dentro de los problemas aritméticos con varias operaciones combinadas, según la terminología usada por Puig y Cerdán [45], y pueden ser resueltos siguiendo diversas estrategias estudiadas y clasificadas en distintos trabajos [14, 25, 26, 56].

Un problema de valor perdido aparece en un contexto de relación funcional entre dos magnitudes M_1 y M_2 , $f : M_1 \rightarrow M_2$ dada por $x_2 = f(x_1) = k \cdot x_1$, que quedaría determinado por el esquema de problemas multiplicativos de una etapa que involucra dos isomorfismos de medidas y dos problemas de comparación [11, 36], tal y como se esquematiza en la figura 4.

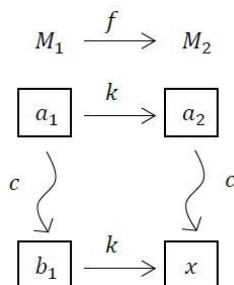


Figura 4: Esquema de problemas multiplicativos de una etapa.

Una primera estrategia pasa por el cálculo de una razón dentro de una misma magnitud $c = b_1/a_1$, de forma que la razón aparece como un escalor o índice comparativo. En una segunda etapa, se utiliza la razón anterior para calcular el valor desconocido, $x = c \cdot a_2$. Es decir, resolver consecutivamente (de izquierda a derecha en el esquema de la figura 4) los dos problemas de comparación verticales. Distintos autores denominan esta estrategia como *estrategia escalor* o de factor de cambio, debido a ese primer cálculo (cuatro es el cuádruple de uno, en el ejemplo de la figura 5).

EJEMPLO. Para hacer 1 litro de batido se necesitan 3 bolas de helado, y para hacer 2 litros, 6 bolas. ¿Cuántos litros de batido se obtendrán con 12 bolas de helado?

Construimos una tabla:

Litros de batido	1	2	3	4
Bolas de helado	3	6	9	12

Al utilizar el doble o el triple de helado obtenemos el doble o el triple de batido. Son magnitudes **directamente proporcionales**.

Así, se obtendrán 4 litros de batido con 12 bolas de helado.

Figura 5: Estrategia escalor para la resolución de un problema de valor perdido [58].

Otra estrategia pasa por, en una primera etapa, calcular alguna de las dos razones que relacionan las magnitudes M_1 y M_2 , por ejemplo, $f(1) = k = a_2/a_1$. En una segunda etapa, se utiliza la razón anterior para calcular el valor desconocido, $x = k \cdot b_1$. Es decir, se resuelven consecutivamente (de arriba abajo en la figura 4) los dos problemas de isomorfismo de medidas horizontales. Esta estrategia se denomina *estrategia funcional* debido a que se calcula la *constante de proporcionalidad* k . Otros autores se refieren a ella como estrategia de razón externa o de reducción a la unidad (figura 6), puesto que dicha k se corresponde con el valor que toma M_2 por cada unidad de M_1 .

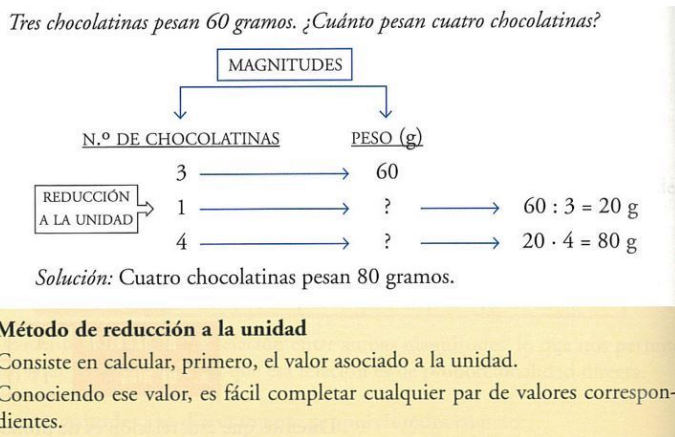


Figura 6: Estrategia funcional de reducción a la unidad [12].

Como podemos observar en la figura 6, el valor de k se identifica con una cantidad de la magnitud M_2 (en el ejemplo, gramos). Sin embargo, otros textos, como el de la figura 7, identifican dicho valor con una cantidad de una nueva magnitud intensiva, obtenido como el cociente entre M_2 y M_1 (en el ejemplo, km/h). Más aún, es posible encontrar textos en los cuales el valor de esta constante es adimensional (figura 8).

Un coche recorre, a velocidad constante, 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 7 horas?

CASO 1: Reduciendo a la unidad

- 1 Calculamos el recorrido en 1 hora: **240 km: 3 horas = 80 km/hora**
- 2 Multiplicamos la unidad (lo recorrido en una hora) por la cantidad que buscamos: **80 km/h × 7 h = 560 km**

Figura 7: Estrategia funcional de reducción a la unidad [32].

Junto con las estrategias multiplicativas anteriores, Tournaire y Pulos [54] señalan las estrategias de *construcción progresiva* (ver, por ejemplo, la figura 9). Estas

En una frutería, el precio de 10 naranjas es de 180 pta. ¿Cómo rellenarías la siguiente tabla?

Número de naranjas	5	10	15
Precio (pta)		180	

Tienes que calcular el precio de una naranja (reducción a la unidad) y multiplicarlo después por el número correspondiente de unidades de fruta. Así, **una naranja vale:** $180 : 10 = 18$ pta.

Número de naranjas	1	5	10	15
Precio (pta)	18	$18 \cdot 5 = 90$	180	$18 \cdot 15 = 270$

Observa que el precio de una naranja y la constante de proporcionalidad directa es lo mismo, ya que: $\frac{18}{1} = \frac{90}{5} = \frac{180}{10} = \frac{270}{15} = 18$

Esto ocurre siempre que trabajemos con dos magnitudes directamente proporcionales. Por tanto, para utilizar el método de reducción a la unidad es necesario hallar la constante de proporcionalidad directa.

Figura 8: Estrategia funcional de reducción a la unidad [47].

estrategias se sustentan en la linealidad de la función de proporcionalidad directa. De este modo, si se encuentra una descomposición del tipo $\mu a_1 + \lambda a_1 = b_1$, las propiedades definitorias de la función lineal aseguran la igualdad:

$$x = f(b_1) = f(\mu a_1 + \lambda a_1) = \mu f(a_1) + \lambda f(a_1) = \mu a_2 + \lambda a_2.$$

Si sabemos el precio de cuatro camisetas para mi equipo de fútbol, sabemos los precios de cualquier número de ellas. Ve rellenando la tabla conforme contestas a nuestras preguntas.

- A Sabemos que 2 camisetas valen 30 €, 4 valen 60 € y 1 camiseta vale 15 €. ¿Cuánto valdrán 8 camisetas? El doble de 4, que es 120 €.
- B ¿Y 6 camisetas? Pues la suma de 4 y 2, 90 €.
- ¿A que ya sabes rellenar los huecos para 3, 5 y 7 camisetas?



N.º DE CAMISETAS	1	2	3	4	5	6	7	8
PRECIO TOTAL	15	30	...	60	...	90	...	120

Figura 9: Estrategia de construcción progresiva ($f(6) = f(4) + f(2)$) [31].

Esta estrategia de construcción progresiva, que Vergnaud también denomina de *descomposición escalar* [56], se basa en una descomposición aditiva de la razón interna considerada en la situación. Sin embargo, también sería posible realizar una descomposición análoga para la razón externa entre distintas magnitudes que, aunque es numéricamente correcta, carece de un sentido físico claro. Esta estrategia,

se denomina de *descomposición funcional* y está relacionada con la estrategia de *construcción de patrones* descrita por Lamón [25, 26].

Ejemplificamos la distinción anterior con el siguiente problema de valor perdido:

Abriendo un grifo 4 horas conseguimos echar 562 litros de agua en una piscina. ¿Cuánta agua echaremos abriendo ese mismo grifo durante 6 horas?

Una estrategia de construcción progresiva procedería del siguiente modo: como en 4 horas echa 562 litros, en 2 horas echará 281 litros. Como, además, 6 horas es la suma de 4 horas y 2 horas, en este tiempo echará $562 + 281 = 843$ litros. Por el contrario, una estrategia de descomposición funcional consistiría en observar que la cantidad de litros se obtiene como 140 veces el número de horas más la mitad del número de horas y, por tanto, se concluiría que en 6 horas se echarán $140 \cdot 6 + \frac{1}{2}6 = 843$ litros.

Finalmente, otra manera de resolver este tipo de problemas consiste en plantear una ecuación a partir de una igualdad entre razones construidas con los datos del enunciado y la incógnita:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{b_1} \quad \text{o bien} \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{x}{a_2}.$$

Una vez planteada esta ecuación, puede resolverse mediante procedimientos algebraicos, como se aprecia en la figura 10; o bien recurriendo a *propiedad fundamental de las proporciones*, que señala que el producto de medios es igual al producto de extremos (figura 11). Por esta última razón, Cramer y Post llaman a este procedimiento *algoritmo de los productos cruzados* [14].

50 gallinas consumen 5 kg de pienso

120 gallinas consumen x kg de pienso

Entonces: $\frac{5}{50} = \frac{x}{120}$

Despejando la x, se tiene que $x = \frac{120 \cdot 5}{50} = \frac{600}{50} = 12$.

Así, 120 gallinas necesitan 12 kg de pienso cada día.

Figura 10: Estrategia de algoritmo de productos cruzados resuelto por procedimientos algebraicos [47].

3. ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA. MÁS ALLÁ DE LOS PROBLEMAS DE VALOR PERDIDO

Tal y como hemos mencionado en la introducción, la utilidad percibida de la regla de tres está vinculada fundamentalmente a la resolución de problemas «cotidianos»

Fracciones equivalentes en las tablas de valores directamente proporcionales

Tomemos la tabla de valores del problema anterior, que relaciona el número de chocolatinas con su peso.

N.º DE CHOCOLATINAS	PESO (gramos)
1	20
2	40
3	60
4	80

Observa que con dos pares de valores correspondientes se construyen dos fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{20}{40} \Leftrightarrow \frac{1 \cdot 40}{40} = \frac{2 \cdot 20}{40}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{60}{80} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 80}{240} = \frac{4 \cdot 60}{240}$$

Comprueba que ocurre lo mismo con nuevos valores de la tabla.

Nos apoyaremos en esta propiedad para justificar un nuevo método para la resolución de problemas de proporcionalidad: **la regla de tres**.

Figura 11: Argumentación previa para despejar la incógnita en el algoritmo de productos cruzados [12].

concretos. Pensamos que la enseñanza de las matemáticas no debería reducirse a la enseñanza de un listado de técnicas para resolver problemas específicos, sino que la resolución de problemas debe ser el medio a través del cual se construyan los objetos matemáticos [8]. En el caso de la proporcionalidad, hemos visto que los problemas de valor perdido admiten múltiples estrategias de resolución que involucran implícita o explícitamente multitud de objetos matemáticos y modos de razonamiento (magnitud, razón, fracción, proporción, constante de proporcionalidad, función lineal, covariación, ecuación, etc.).

De hecho, la proporcionalidad es un fenómeno que engloba muchas otras situaciones y hunde sus raíces en el trabajo con magnitudes en los primeros años, con enfoques menos numéricos y más cualitativos [39] y es una constante en el currículo hasta los últimos años de Secundaria y primeros años de Bachillerato, donde se aborda con enfoques basados en la modelización funcional [19]. Comprender, por ejemplo, que un refresco sabe más a limón que otro porque hemos echado más zumo y menos agua, ya exige un grado de abstracción. Este proceso de abstracción entronca con el razonamiento propio de la aritmética, en el que cada uno de los números implicados en la resolución de un problema contextualizado tiene un significado preciso, dependiente del contexto específico. Ahora bien, un mismo problema puede ser abordado de múltiples maneras, cada una desde un nivel de abstracción diferente. Godino y colaboradores [20] distinguen diversos niveles de algebraización, que permiten ubicar al objeto de la proporcionalidad [21] en el seno del currículo, abriendo la puerta a definir tres significados de la proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional. A estos tres significados habría que añadir el correspondiente a un nivel menor de abstracción, un significado informal o cualitativo, puesto de manifiesto en la argumentación que surgiría en torno a la situación del zumo.

A lo largo de las diferentes etapas educativas, el desarrollo del razonamiento proporcional puede ir ligado al desarrollo de otros conceptos como el de multiplicación de números enteros [23] o la comprensión del número racional [27]. Así, el razonamiento proporcional, como razonamiento aritmético, tiene importancia en sí mismo. Prueba de ello es el interés en desarrollar lo que se denomina *sentido numérico* [1, 53] que queda patente en los nuevos currículos en España al configurarse como conjunto de saberes, tanto en Primaria como en Secundaria. La utilización de técnicas algebraicas, puramente sintácticas, antes de tiempo puede inhibir el desarrollo del razonamiento proporcional.

Además, la transición entre la educación Primaria y Secundaria en el sistema educativo español coincide con la etapa de transición entre el pensamiento aditivo y multiplicativo [17]. La educación en esta etapa debe promover el paso hacia un razonamiento proporcional multiplicativo de forma que los alumnos puedan gestionar de forma crítica las situaciones apropiadas donde pueden aplicarlo, distinguiendo situaciones proporcionales y no proporcionales [55] de manera significativa.

La comprensión de las estructuras multiplicativas [56] resulta un elemento clave para el desarrollo del razonamiento proporcional, tanto si nos centramos en las relaciones simples directas [24, 26, 51, 55], como si incluimos las situaciones inversas y compuestas [4, 28]. Unas piezas fundamentales de la estructura multiplicativa son los problemas de isomorfismo de medidas, que aparecen en las situaciones de proporcionalidad simple directa y construyen el significado de las magnitudes intensivas cociente y los problemas de producto de medidas que dan significado al producto de magnitudes, especialmente si estas son extensivas [56].

Para potenciar el desarrollo del razonamiento proporcional, los estudiantes deben enfrentarse a diferentes tipos de tareas ricas y no rutinarias [14, 50]. Una clasificación ampliamente utilizada de tareas de proporcionalidad se basa en la distinción entre problemas de valor perdido y problemas de comparación, tanto cuantitativa como cualitativa. Como ya hemos visto, en un problema de valor perdido se proporciona una pareja de valores relacionados (a_1, a_2) y se solicita el valor x correspondiente a una de las magnitudes en otra pareja de valores relacionados (b_1, x) , donde el valor b_1 también lo proporciona el enunciado del problema. Los problemas de comparación numérica o cuantitativa ponen en juego dos (o más) situaciones diferentes de proporcionalidad simple que involucran la misma pareja de magnitudes, referidas a objetos diferentes. Las constantes de proporcionalidad para cada una de las situaciones, k_1 y k_2 respectivamente, pueden no ser iguales. En este caso, el enunciado del problema proporciona dos parejas de valores relacionados (a_1, a_2) y (b_1, b_2) , una por cada situación. El problema, de forma directa o indirecta, solicita comparar los valores k_1 y k_2 . Un ejemplo de problema de comparación cuantitativa sería el siguiente:

La receta de limonada de María indica que hay que mezclar 0,5 litros de zumo de limón con 1,5 litros de agua. La receta de Pedro dice que hay que mezclar 1,5 litros de zumo de limón con 5 litros de agua. ¿Cuál de las dos recetas dará un sabor a limón más fuerte?

Por último, los problemas de comparación cualitativa tienen una estructura similar a la de los problemas de comparación cuantitativa. Sin embargo, en este caso

el enunciado proporciona comparaciones (cualitativas) entre los valores para ambas situaciones sin dar explícitamente dichos valores. Como en el caso cuantitativo, el problema solicita, bien sea de forma directa o indirecta, comparar k_1 y k_2 con la información cualitativa dada. Utilizando una estructura similar al anterior construimos el siguiente ejemplo de problema de comparación cualitativa:

Para hacer limonada mezclando zumo de limón y agua, María usa más zumo de limón que Pedro. Sabemos también que Pedro ha usado más agua que María. ¿Qué limonada tendrá un sabor más fuerte, la de María o la de Pedro?

A pesar de que la distinción anterior es clásica en la investigación en educación matemática, y que tanto los problemas de comparación cuantitativa como cualitativa poseen un gran potencial para el desarrollo del razonamiento proporcional [33], la práctica educativa suele basarse en la resolución de problemas de valor perdido, casi de forma exclusiva.

Además de ampliar los tipos de problemas que se presentan, la instrucción no debería basarse en técnicas específicas para cada tipo de problema, que, además, según señalan diferentes estudios, suelen presentarse algoritmizadas escondiendo la naturaleza del fenómeno que se estudia [52, 55]. En este sentido, se puede observar cómo, incluso dentro de una misma estructura multiplicativa, algunos libros de texto presentan técnicas diferentes de resolución dependiendo del contexto. Así, por ejemplo, los problemas de interés simple pueden recibir un tratamiento desconectado al que reciben de forma general los problemas de proporcionalidad compuesta, aunque sean un caso particular de estos [34]. Estas características de algunos libros de texto promueven un modelo de enseñanza enfocado en destrezas [7, 30] ya que «describen un enfoque que contempla el aprendizaje matemático como la memorización de destrezas básicas a través de la repetición, y el objetivo principal es adquirir un conjunto de reglas, fórmulas y procedimientos» [30, p. 2]. Aunque los estudiantes puedan adquirir un nivel alto de destreza a través de la repetición acrítica de técnicas y procedimientos, bajo este enfoque, se les considera seres que en su mayoría son incapaces de comprender muchos de los conocimientos matemáticos. Frente a estos enfoques, algunas propuestas de enseñanza de la proporcionalidad que hacen énfasis en los conceptos básicos, sus significados y las caracterizaciones de las relaciones de proporcionalidad han mostrado potencial para promover que el alumnado sea capaz de resolver una amplia variedad de problemas sin necesidad de ser instruidos en técnicas específicas para cada uno de ellos [33, 40].

4. CONCLUSIÓN

La proporcionalidad aritmética es uno de los contenidos, o saberes, más importantes de la matemática escolar. Lo ha sido, de hecho, a lo largo de toda la historia de la enseñanza de las matemáticas. Como consecuencia de una práctica educativa basada fundamentalmente en la adquisición de una serie de destrezas y técnicas de resolución de problemas, una buena parte de la población identifica la proporcional-

lidad con una de sus técnicas asociadas más reconocibles que, además, resulta tener nombre propio desde hace siglos: la regla de tres.

Esta identificación, unida a una idea relativamente poco clara del significado del término «regla de tres» y a una cierta mitificación del mismo, pueden explicar, en parte, el revuelo ocasionado a raíz de la aprobación de los nuevos currículos, en los que dicho término no aparece mencionado explícitamente. Por una parte, en estas páginas hemos tratado de presentar una idea clara de la regla de tres a partir de su origen y de su evolución histórica. Por otra parte, hemos intentado mostrar su carácter limitado como técnica de resolución de problemas, así como su inadecuación desde un punto de vista didáctico dentro del amplio panorama del razonamiento proporcional.

Como profesionales de las matemáticas y de la educación matemática, pensamos que una de nuestras principales labores es la de contribuir a que nuestros estudiantes logren aprendizajes significativos y a que adquieran competencias que les permitan desenvolverse en una sociedad en la que es cada vez más necesario disponer de herramientas vinculadas al pensamiento matemático. Para conseguirlo es indispensable que nuestra práctica docente no se oriente prioritariamente hacia la mecanización en la resolución de problemas específicos, sino que se centre en la construcción por parte de los estudiantes de la estructura conceptual a la que dan lugar dichos problemas.

Pero, además, hemos de tener en cuenta que el conocimiento matemático es un fenómeno social y cultural. Por tanto, y en parte como consecuencia de lo anterior, también hemos de contribuir a que la sociedad adquiera una visión realista de las matemáticas más allá de la idea, relativamente extendida, de que estas consisten esencialmente en una serie de reglas, y que «hacer matemáticas» se reduce a seleccionar la regla adecuada en cada situación. En el contexto de la proporcionalidad, esto pasa necesariamente por desterrar completamente la regla de tres y otros procedimientos mecánicos, y poner énfasis en los fundamentos conceptuales que pueden utilizarse para resolver cualquier tipo de situación de forma natural.

AGRADECIMIENTOS. Los autores de este trabajo pertenecen al grupo S60_20R «Investigación en Educación Matemática» financiado por el Gobierno de Aragón. El cuarto autor también agradece el apoyo del proyecto de investigación «Razonamiento proporcional y algebraico en la formación de profesores para enseñar estadística» (PID2019-105601GB-I00/AEI/10.13039/501100011033).

REFERENCIAS

- [1] R. ALMEIDA Y A. BRUNO, Perfiles de sentido numérico en estudiantes de secundaria, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **22** (2019), 563–579.
- [2] M. D. ÁLVAREZ, J. HERNÁNDEZ, A. Y. MIRANDA, M. R. MORENO, S. PARRA, M. REDONDO, R. REDONDO, M. T. SÁNCHEZ, T. SANTO Y E. SERRANO, *Matemáticas 2 ESO*, Santillana, Madrid, 2008.
- [3] ANÓNIMO, *arte de labbacho*, s.e., Treviso, 1478.

- [4] M. ARICAN, Preservice Middle and High School mathematics teachers' strategies when solving proportion problems, *Int. J. Sci. Math. Educ.* **16** (2018), 315–335.
- [5] A. K. BAG, Al-Biruni on indian arithmetic, *Indian J. History Sci.* **10** (1975), 174–184.
- [6] B. BAILS, *Principios de Matemática. Tomo I*, Joachin Ibarra, Madrid, 1776.
- [7] A. J. BAROODY Y R. T. COSLICK, *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, 1998.
- [8] P. BELTRÁN-PELLICER Y S. MARTÍNEZ-JUSTE, Enseñar a través de la resolución de problemas, *SUMA* **98** (2021), 11–21.
- [9] K. CHEMLA, Generality above abstraction: The general expressed in terms of the paradigmatic in mathematics in ancient China, *Science in Context* **16** (2003), 413–458.
- [10] K. CHEMLA Y S. GUO, *Les neuf chapitres: Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, París, 2004.
- [11] E. CID, J. D. GODINO Y C. BATANERO, *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*, Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2003.
- [12] J. CÓLERA Y I. GAZTELU, *Matemáticas 1 Educación Secundaria*, Madrid, Anaya, 2007.
- [13] J. B. CORACHÁN, *Arithmetica demonstrada theorico-practica para lo mathematico y mercantil*, Valencia, Jayme de Bordazar, 1699.
- [14] K. CRAMER Y T. POST, Connecting research to teaching proportional reasoning, *Mathematics Teacher* **86** (1993), 404–407.
- [15] L. DIGGES, *An Arithmeticall Militare Treatise, named Stratitotics*, Londres, Henrie Bynneman, 1579.
- [16] J. M. EYARALAR, *Metodología de la Matemática*, Madrid, Editorial Reus, 1933.
- [17] C. FERNÁNDEZ Y S. LLINARES, Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria, *Enseñanza de las Ciencias* **30** (2012), 129–142.
- [18] A. FERNÁNDEZ LAJUSTICIA Y L. PUIG, Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **5** (2002), 397–416.
- [19] F. J. GARCÍA, *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis doctoral, Universidad de Jaén, 2005.
- [20] J. D. GODINO, L. AKÉ, M. GONZATO Y M. R. WILHELMI, Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros, *Enseñanza de las Ciencias* **32** (2014), 199–219.
- [21] J. D. GODINO, P. BELTRÁN-PELLICER, M. BURGOS Y B. GIACOMONE, Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la propor-

- cionalidad, *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, Granada, 2017.
- [22] B. GÓMEZ, Los ritos en la enseñanza de la regla de tres, *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*, 49–69, Publicaciones Universidad de Córdoba, 2006.
- [23] K. HINO Y H. KATO, Teaching whole-number multiplication to promote children's proportional reasoning: a practice-based perspective from Japan, *ZDM* **51** (2019), 125–137.
- [24] R. KARPLUS, S. PULOS Y E. K. STAGE, Proportional reasoning of early adolescents, *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 45–90, Academic Press, Nueva York, 1983.
- [25] S. J. LAMON, Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes, *Rational numbers. An integration of research*, 131–156, Lawrens Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1993.
- [26] S. J. LAMON, Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking, *J. Res. Math. Educ.* **24** (1993), 41–61.
- [27] S. J. LAMON, Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 629–668, NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC, 2007.
- [28] J. P. LEVAIN Y G. VERGNAUD, Proportionnalité simple, proportionnalité multiple, *Grand N* **56** (1995), 55–66.
- [29] S. LLINARES Y C. FERNÁNDEZ, Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **24** (2021), 185–205.
- [30] M. LÓPEZ DALMAU Y Á. ALSINA, La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en educación infantil, *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia* **4** (2015), 1–10.
- [31] J. MARTÍNEZ, J. M. DE LA ROSA Y C. SÁNCHEZ, *Matemáticas 5º Primaria*, Anaya, Madrid, 2016.
- [32] J. MARTÍNEZ, J. M. DE LA ROSA Y C. SÁNCHEZ, *Matemáticas 6º Primaria*, Anaya, Madrid, 2018.
- [33] S. MARTÍNEZ-JUSTE, *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de Secundaria*, Tesis doctoral, Universidad de Valladolid, 2022.
- [34] S. MARTÍNEZ-JUSTE, J. M. MUÑOZ-ESCOLANO Y A. M. OLLER-MARCÉN, Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE, *Avances de Investigación en Educación Matemática* **8** (2015), 95–115.
- [35] S. MARTÍNEZ-JUSTE, J. M. MUÑOZ-ESCOLANO Y A. M. OLLER-MARCÉN, Una experiencia de investigación-acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta, *Enseñanza de las Ciencias* **37** (2019), 85–106.
- [36] C. MAZA, *Enseñanza de la multiplicación y división*, Síntesis, Madrid, 1991.

- [37] MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL, Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, *Boletín Oficial del Estado* **52**, 2 de marzo de 2022, 24386–24504.
- [38] MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL, Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, *Boletín Oficial del Estado* **76**, 30 de marzo de 2022, 41571–41789.
- [39] T. NUNES, D. DESLI Y D. BELL, The development of children's understanding of intensive quantities, *Int. J. Educ. Res.* **39** (2003), 651–675.
- [40] A. M. OLLER-MARCÉN, *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*, Tesis doctoral, Universidad de Valladolid, 2012.
- [41] A. M. OLLER-MARCÉN Y J. M. GAIRÍN-SALLÁN, La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **16** (2013), 317–338.
- [42] L. PACIOLI, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Paganini, Venecia, 1494.
- [43] F. PELLOS, *Cõpendiõ de lo abaco*, Turín, Nicolo Benedeti, 1492.
- [44] J. PÉREZ DE MOYA, *Arithmetica practica y speculatiua*, Salamanca, Mathias Gast, 1562.
- [45] L. PUIG Y F. CERDÁN, *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid, 1988.
- [46] F. ROSEN, *The algebra of Mohammed ben Musa*, J. L. Cox, Londres, 1831.
- [47] J. L. SÁNCHEZ Y J. VERA, *Matemáticas 1º Secundaria*, Navarra, Oxford Educación, 2000.
- [48] J. H. C. SCHWARZ, *Pedagogía o tratado completo de educación y enseñanza. Tomo tercero. Pedagogía aplicada*, Librería de los Señores Viuda e hijos de don Antonio Calleja, Madrid, 1846.
- [49] L. SIGLER, *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation*, Springer, Nueva York, 2003.
- [50] P. SINGH, Understanding the concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* **31** (2000), 579–599.
- [51] P. SINGH, Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students, *Educ. Stud. Math.* **43** (2000), 271–292.
- [52] H. SOLAR Y A. ZAMORANO, Algebrización en la proporcionalidad de magnitudes, *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico*, 507–526, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2006.
- [53] J. T. SOWDER, Estimation and number sense, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 371–389, Macmillan Publishing, 1992.
- [54] F. TOURNAIRE Y S. PULOS, Proportional reasoning: A review of the literature, *Educ. Stud. Math.* **16** (1985), 181–204.

- [55] W. VAN DOOREN, D. DE BOCK, D. JANSSENS Y L. VERSCHAFFEL, The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity, *J. Res. Math. Educ.* **39** (2008), 311-342.
- [56] G. VERGNAUD, Multiplicative structures, *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 127–174, Academic Press, Nueva York, 1983.
- [57] B. VILA, *Reglas breves de arithmetica, ab la theorica y art pera inventarlas*, Jaume Cendrath, Barcelona, 1596.
- [58] J. R. VIZMANOS, M. ANZOLA, J. BARGUEÑO Y J. PERALTA, *Matemáticas Ábaco 2*, S.M., Madrid, 2008.

SERGIO MARTÍNEZ-JUSTE, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Correo electrónico: sergiomj@unizar.es

ANTONIO M. OLLER-MARCÉN, CENTRO UNIVERSITARIO DE LA DEFENSA DE ZARAGOZA - IUMA,
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Correo electrónico: oller@unizar.es

JOSÉ M. MUÑOZ-ESCOLANO, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA - IUMA
Correo electrónico: jmescola@unizar.es

PABLO BELTRÁN-PELLICER, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Correo electrónico: pbeltran@unizar.es