
MATEMÁTICAS EN LAS AULAS DE SECUNDARIA

Sección a cargo de

Luisa Cuadrado

El teorema de Pitágoras a través de la resolución de problemas

por

Pablo Beltrán-Pellicer

RESUMEN. El teorema de Pitágoras es, sin duda, uno de los objetos matemáticos más fascinantes de la educación obligatoria. Su enseñanza no puede reducirse a la aplicación de la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, siendo a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c la de la hipotenusa. Muchos autores coinciden en subrayar la oportunidad que ofrece para trabajar la conjetura y la prueba en matemáticas. En este artículo reflexionamos en primer lugar sobre su significado, revisando algunas propuestas de enseñanza y resultados de investigación. Después, describimos con detalle el diseño e implementación de una propuesta didáctica para 2.º ESO, prestando especial atención a la planificación del andamiaje y a la interacción en el aula, apoyándonos para ello en producciones del alumnado.

1. INTRODUCCIÓN

El teorema de Pitágoras es uno de los contenidos de matemáticas más perdurables en la memoria de todos los que han pasado por la escolarización obligatoria. Tanto, que forma parte de la cultura popular. ¿Quién ha visto *El mago de Oz* (Fleming, 1939) y no se acuerda del momento en que el mago entrega el diploma al Espantapájaros? (figura 1b):

—*Al salir de allí [universidad] piensan en cosas grandes, profundas, y su cerebro es igual al tuyo. Pero ellos tienen algo de lo que tú careces: un diploma. Así pues, en virtud de la autoridad que me ha conferido la Universitatus Comitatus e Pluribus Unum, con este diploma te otorgo el título de Doctor Honoris Causa.*

—*¿Doctor en qué?*



(a) El Mago de Oz.



(b) Los Simpson.

Figura 1: El teorema de Pitágoras en la ficción.

—*Quiere decir... doctor en eruditología.*

—*La suma de la raíz cuadrada de cada uno de los lados de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del otro lado.*

Esta escena de *El mago de Oz* recibe un homenaje por parte de la serie de dibujos animados *Los Simpson* (Groening, Simon y Brooks, 1989–actualidad), donde, al comienzo del décimo episodio de la quinta temporada, Homer descubre unas gafas en un retrete y al ponérselas recita el conocido teorema (figura 1b). Además, lo hace de forma errónea, al igual que en la película: «*El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos en un triángulo isósceles*», solo que en este caso se escucha después una voz que le corrige: «*En un triángulo rectángulo*». En el fondo, la escena del Espantapájaros recibiendo el diploma se puede interpretar como una especie de crítica al sistema universitario, donde, a veces, los títulos y las apariencias rimbombantes no reflejan el conocimiento real.

Efectivamente, el teorema tiene algo que lo hace especial. Quizás, que se trata de uno de los primeros contactos del alumnado con un resultado profundo de las matemáticas. No obstante, como señalan Troyano y Flores ([24]) y, tal y como se aprecia en las escenas mencionadas, el teorema se identifica más con la fórmula que con el significado.

Aunque actualmente nos encontramos en pleno proceso de reforma curricular en España, resulta conveniente acudir en primer lugar a la normativa para ubicar dónde y cómo aparece el teorema de Pitágoras. De esta forma, en el currículo LOMCE nacional (2015), aparece como contenido por primera vez en el bloque de geometría de 1.º y 2.º de ESO (12–13 y 13–14 años):

Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.

Este contenido se relaciona directamente con el siguiente criterio de evaluación y sus correspondientes estándares (merece la pena incluirlos en este artículo aunque durante el curso 2021/2022 los estándares presentan ya un carácter meramente orientativo):

Criterio 3. Reconocer el significado aritmético del teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico

(áreas de cuadrados contruidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.

Estándar 3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.

Estándar 3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.

Más adelante, en 4.º ESO, en la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, vuelve a aparecer de forma explícita con el siguiente contenido:

Figuras semejantes. Teoremas de Tales y Pitágoras. Aplicación de la semejanza para la obtención indirecta de medidas.

El criterio de evaluación y los estándares asociados aparecen redactados de la siguiente manera:

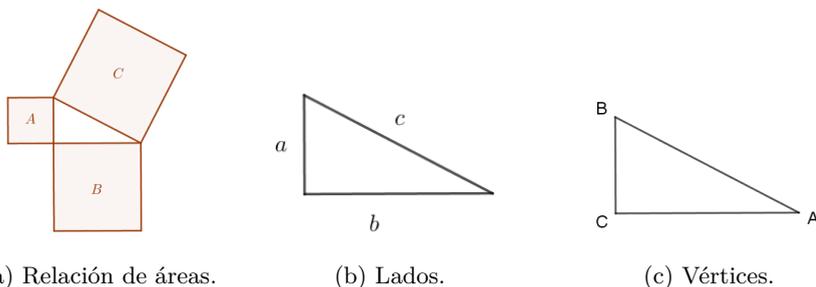
Criterio 1. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas, y aplicando, así mismo, la unidad de medida más acorde con la situación descrita.

Estándar 1.4. Calcula medidas indirectas de longitud, área y volumen mediante la aplicación del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos.

En los borradores de los nuevos currículos sujetos a exposición pública a comienzos de 2022, el teorema de Pitágoras se menciona dentro del sentido espacial, para los cursos de 1.º a 3.º de ESO:

Reconocimiento de las relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales.

La cuestión del significado siempre es compleja y, hasta cierto punto, escurridiza. En la normativa LOMCE se alude al significado aritmético y al significado geométrico, de donde ya podríamos deducir que el teorema ha de abordarse desde diferentes puntos de vista. En la siguiente sección hacemos un recorrido sobre algunas propuestas de enseñanza que tienen en cuenta la pluralidad de significados del teorema. Precisamente, debido a la complejidad que encierra la didáctica del teorema, se ha estudiado el impacto de diferentes factores en la comprensión de este por parte del alumnado, por lo que es pertinente sintetizar algunos resultados de investigación en este trabajo. Después, describimos una propuesta que tiene en cuenta esta revisión bibliográfica, poniendo especial atención al andamiaje y a la gestión de aula, ya que tuvimos ocasión de implementarla durante el curso 2020/2021.



(a) Relación de áreas.

(b) Lados.

(c) Vértices.

Figura 2: Representaciones empleadas para introducir el teorema de Pitágoras.

2. ANTECEDENTES

Chambers ([5]) reflexiona sobre la enseñanza del teorema de Pitágoras en un artículo breve orientado a presentar las diferentes opciones que pueden considerar los docentes, así como la posibilidad de emplear el teorema como un acercamiento a la idea de prueba en matemáticas. De esta manera, comienza explorando distintas formas de presentarlo:

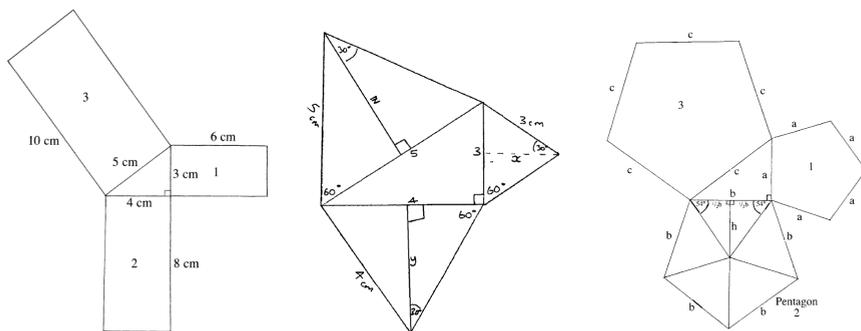
1. Sin dibujo. El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Este enunciado (realmente, es el que intenta enunciar el Espantapájaros de *El mago de Oz*) suele usarse en conjunción con otros, ya que por sí solo no parece muy adecuado.
2. Como una relación entre áreas, $C = A + B$, acompañada por un dibujo como el de la figura 2a.
3. Con el dibujo de un triángulo rectángulo en el que se han etiquetado los lados (sus longitudes) (figura 2b) y que da pie a tres posibles enunciados:

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Obviamente, son enunciados equivalentes. Sin embargo, Chambers subraya que la forma de introducirlo importa, ya que las fórmulas suelen presentarse con una letra única en el miembro de la izquierda, y esto puede causar algunas dificultades.

4. Otra opción, posiblemente menos popular y que resulta más difícil de comprender para el alumnado, según Chambers, consiste en etiquetar los vértices del triángulo (figura 2c), de manera que el teorema se enuncia como $AB^2 = AC^2 + BC^2$ o como $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$.

Normalmente se tiende a usar una combinación de las cuatro opciones anteriores. Otra decisión didáctica a considerar, siguiendo a Chambers ([5]), es si una justificación intuitiva del teorema nos es suficiente o si, por el contrario, queremos llegar a probarlo. En su artículo describe cuatro posibles justificaciones del teorema. La primera de ellas consiste en dibujar varios triángulos rectángulos y los correspondientes cuadrados sobre cada uno de sus lados, comprobando que la relación de áreas



(a) Rectángulos 2x1. (b) Triángulos equiláteros. (c) Pentágonos regulares.

Figura 3: Extensiones del teorema de Pitágoras a otro tipo de figuras planas. Fuente: Crawford ([6]).

funciona en todos ellos, descomponiendo las figuras, contando «cuadraditos» o con otras técnicas de medida de áreas. Esta justificación se puede extender explorando qué pasa con otras formas que no sean cuadrados. Otra justificación similar, pero que enfatiza la relación entre longitudes, es dibujar varios triángulos rectángulos y anotar la medidas de las longitudes de los lados, así como sus cuadrados. Una tercera justificación podría consistir en utilizar un dibujo de un triángulo rectángulo, construir los cuadrados en cada uno de sus lados y, mediante descomposición, comprobar que los de los catetos permiten recubrir el de la hipotenusa. Finalmente, Chambers señala la interesante propuesta de que el alumnado explore qué ocurre cuando el triángulo es acutángulo u obtusángulo, observando que en el primer caso $c^2 < a^2 + b^2$ y, en el segundo caso, $c^2 > a^2 + b^2$.

Las justificaciones anteriores son, realmente, conjeturas, ya que utilizan casos particulares. Una prueba, entendida como demostración, debe ser algo general. Chambers menciona cinco posibles pruebas, que se basan en argumentos diferentes y que varían desde la congruencia de triángulos y consideraciones sobre áreas hasta razones de semejanza. Crawford ([6]), precisamente, hace hincapié en la cuestión de la semejanza, señalando que la enseñanza del teorema de Pitágoras suele limitarse a la relación de los cuadrados, cuando realmente puede extenderse a otro tipo de figuras, como se muestra en la figura 3. Remitimos a los lectores a los libros de Loomis ([18]) y, más recientemente, Sparks ([21]), donde se recopilan numerosas pruebas del teorema de Pitágoras.

Por su parte, Cañadas [4] enfatiza el papel que puede jugar el teorema de Pitágoras para acercar la idea de demostración en matemáticas y presenta el diseño e implementación de una propuesta de actividad para un curso de educación de adultos que le sirve para detectar los razonamientos que se ponen en juego. La actividad en cuestión es un taller de dos horas en las que primero se explica la relación entre los enunciados analítico y geométrico del teorema, pasando luego a trabajar en las tareas. Estas consisten en reconstruir la demostración geométrica de tres formas distintas y en una serie de preguntas sobre ellas. Se puso de manifiesto la variedad

de significados personales de la demostración, habiendo participantes que no consideraban como demostraciones aquellas que solo son válidas para casos concretos y otros participantes que veían la demostración como una explicación de esos casos concretos. Cañadas concluye que puede ser más adecuado trabajar con demostraciones informales e intuitivas, cercanas a lo concreto de la situación, en lugar de con razonamientos lógicos abstractos. Además, menciona que, para introducir estas ideas de conjetura y prueba, pueden tener mayor interés didáctico las demostraciones geométricas que las analíticas, ya que las primeras resultan más accesibles y, en la experiencia, los participantes tuvieron dificultad en relacionar los enunciados analíticos y geométricos del teorema.

Troyano y Flores ([24]) mencionan que los libros de texto presentan directamente el enunciado del teorema, junto con la fórmula, llegando a ofrecer una demostración geométrica con áreas. Luego, suelen exponer el caso recíproco, es decir, identificar triángulos rectángulos cuando sus lados verifican el teorema. Finalmente, los libros incluyen aplicaciones del teorema para calcular distancias desconocidas. Al igual que otros autores, dejan claro que *ver* el teorema de Pitágoras no es aprenderse su fórmula. Los conceptos matemáticos no han de confundirse con una única representación, ni con los procedimientos asociados a estos. Troyano y Flores realizan un análisis de contenido ([20]) para delimitar los diferentes significados del teorema, a partir de los problemas, fenómenos y situaciones en los que surge. De esta manera, distinguen el teorema como relación métrica entre áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo; como relación métrica entre las longitudes de dichos lados; o como la condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo.

En su artículo, Troyano y Flores ([24]) describen el diseño de una serie de tareas para observar cómo comprende el alumnado el teorema de Pitágoras, conforme construyen su significado, comprobando propiedades métricas asociadas a tipos de triángulos y formulando el teorema de varias formas. Sintetizando el diseño, los estudiantes calculan las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de algunos triángulos rectángulos mediante diferentes técnicas, para luego explorar qué ocurre con las longitudes de los lados y qué pasa con otros tipos de triángulos. Implementaron dicha tarea con un grupo de 3.º ESO (14–15 años) al comienzo de la unidad correspondiente; es decir, sin instrucción previa. Concluyen que la secuencia diseñada fomenta la construcción de un significado rico del teorema, reconociendo la complejidad de la doble implicación del teorema de Pitágoras entre tipo de triángulo y relación métrica, que ningún alumno pareció comprender realmente.

Otros autores, como Arnal-Bailera ([2]), coinciden en señalar que introducir o revisar el teorema de Pitágoras es una buena oportunidad de iniciación a la prueba en matemáticas. Para ello, sugieren el empleo de un entorno de geometría dinámica (GeoGebra) con el objetivo de explorar la relación de áreas en diversas situaciones e indagar para ver si se cumple también el recíproco del teorema; es decir, que si no es un triángulo rectángulo no se cumple la igualdad de áreas.

Existen estudios que documentan algunos aspectos de la enseñanza del teorema de Pitágoras en otros países. Huang y Leung ([10]) describen un estudio de caso con profesores de la República Checa, Hong Kong y Shanghai, con alumnado en cursos

equivalentes a un 2.º ESO (13–14 años). Sus resultados indican cierta diversidad, tanto a la hora de planificar el proceso de enseñanza y aprendizaje como en las propias dinámicas de aula. Así, observaron que el profesor checo dedicó menos tiempo en clase a la prueba del teorema que sus colegas de Hong Kong y Shanghai.

Un grupo de investigadores ligados al Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, como se conoce, por sus siglas en inglés) de 1995 en Alemania y Suiza ([11, 12, 17]) desarrolló un proyecto en el que utilizaban las técnicas de codificación de vídeos de clases del estudio TIMSS, pero centrándose en un contenido específico, eligiendo para ello el teorema de Pitágoras. De esta manera, todas las sesiones grabadas trataban el mismo contenido y, manteniendo el carácter naturalista del estudio, permitían analizar el impacto de la enseñanza tanto a corto plazo, con un pretest y postest, como a más largo plazo, al inicio y al final del curso escolar. La muestra, voluntaria, se compuso de 20 clases de Suiza y 20 clases de Alemania, de cursos equivalentes a 2.º y 3.º de ESO (13–14 y 14–15 años), que es cuando se aborda el teorema de Pitágoras en el currículo de estos países, respectivamente.

Consideran diversos factores, como la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje sobre el teorema de Pitágoras, la dinámica de la propia clase y aspectos específicos del enfoque didáctico adoptado por el docente, el cual clasificaron en expositivo (*lecturing*), expositivo-interrogativo (*developing*) y por descubrimiento (*discovering*). Su análisis no evidenció efecto significativo del enfoque de enseñanza en el desempeño de los estudiantes, tal y como lo estaban evaluando, pero sí en la percepción del alumnado de la calidad de la enseñanza. Así, el enfoque expositivo se relacionó con una mejor autopercepción de la comprensión, a pesar de que el enfoque por descubrimiento presentaba mayores niveles de activación cognitiva *a priori*. En el estudio también señalan ([17]) que la activación cognitiva, junto con la gestión de aula, y un clima participativo se relacionan con el interés hacia las matemáticas y con el desempeño.

En el ámbito de la formación del profesorado, es interesante el estudio de Godino *et al.* ([8]), donde se describe una experiencia con estudiantes del Máster de Profesorado de ESO y Bachillerato para evaluar su competencia de análisis epistémico. Es decir, la competencia para identificar los significados que emergen en la resolución de una tarea. La tarea elegida para ello es una justificación geométrica del teorema a partir de la relación de áreas. Además de resolverla y argumentar la respuesta, se pide a los participantes que señalen los conocimientos y procesos que se ponen en juego. Por un lado, la discusión de los resultados sugiere que es una tarea de gran complejidad para los futuros profesores. Por otro, queda patente la utilidad de estas experiencias para reflexionar acerca de lo que significa enseñar cierto contenido (en este caso, el teorema de Pitágoras).

Yang ([25]) relata un ciclo de diseño e implementación de una secuencia para el teorema de Pitágoras según el esquema *Teaching Research Group* (TRG) establecido en China, similar al *lesson study* típico de Japón ([7, 15]). Yang describe la secuencia inicial que plantea una docente novel y cómo las sugerencias que aporta el equipo del TRG, tanto acerca del diseño como de la gestión de aula, ocasionan sucesivas mejoras. De esta manera, la docente reconoce que en la primera implementación pensaba que justificar el teorema era demasiado difícil, por lo que enfatizó la aplicación de

este. Sin embargo, con el andamiaje (*scaffolding*) adecuado, que incluía el uso de una rejilla cuadrículada, pudo enriquecer la secuencia.

Güner ([9]) realiza una experiencia con un grupo de 43 futuros profesores de secundaria, en la que se les pide que prepararen una secuencia didáctica sobre el teorema de Pitágoras para un curso equivalente a 3.º ESO (14–15 años). Algo menos de la mitad de los participantes incluyeron una prueba en su secuencia, siendo más abundantes las pruebas algebraicas y las pruebas por semejanza de triángulos (nueve y siete participantes, respectivamente) que las visuales (dos participantes). Por otro lado, los niveles cognitivos (en el sentido del estudio TIMSS) de las preguntas propuestas fueron sobre todo de conocimiento (37%) y aplicación (60%), constatándose apenas un 3% de tareas en el nivel de razonamiento.

Como ha quedado de manifiesto, todos estos autores coinciden en que el teorema de Pitágoras es lo suficientemente complejo como para recibir nuestra atención y que involucra diferentes significados. De hecho, esta complejidad ha supuesto que sea utilizado como pretexto en actividades de formación del profesorado. Además, el teorema también se postula como una excelente oportunidad para la argumentación, conjetura y demostración.

3. UNA PROPUESTA DE AULA

A continuación, describimos una secuencia didáctica que considera los diferentes objetos matemáticos que dan significado a lo que se conoce como el teorema de Pitágoras, mencionados en los antecedentes, desde un enfoque constructivista. Es decir, la aproximación a estos objetos se realiza desde los conocimientos previos del alumnado, proporcionando el andamiaje (*scaffolding*) necesario para facilitar un entorno de aprendizaje a través de la resolución de problemas. En este entorno merecerán especial atención los procesos de generalización que, necesariamente, involucra este resultado fundamental de las matemáticas. No se trata tampoco de la secuencia ideal para la enseñanza del teorema de Pitágoras, si es que tal secuencia existe.

La secuencia de tareas no pretende ser original en su planteamiento. De hecho, la construcción inicial del teorema se basa en la unidad *Discovering the Pythagorean Theorem* del Mathematics Assessment Project del Shell Centre ([23]) y las tareas con las que enlazaremos después proceden de la web de NRICH, una iniciativa de la Universidad de Cambridge (<https://nrich.maths.org>). De esta forma, aprovechamos para reivindicar la gran cantidad de materiales que hay disponibles actualmente y que siguen una línea que se remonta a los años 80 ([22]).

Por nuestra parte, se aportarán detalles relacionados con los objetivos de la secuencia y, especialmente, con la gestión de aula y la negociación de significados. Tanto en la secuencia del Shell Centre como en las actividades de NRICH se promueve su utilización desde un enfoque a través de la resolución de problemas, con énfasis en la evaluación formativa. Sin embargo, somos conscientes de que nunca se insistirá lo suficiente en que no es lo mismo dar las matemáticas construidas (o construir las delante del alumnado) que construir las *con* el alumnado. Una tarea solamente será rica e inclusiva en la medida en que lo sea su implementación en el aula.

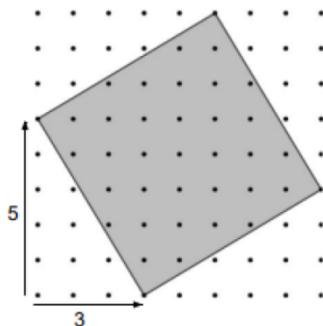


Figura 4: Tarea inicial: ¿cuál es el área de este cuadrado?

La secuencia se implementó en los grupos de 2.º ESO (13–14 años) de un Centro Público Integrado de Aragón durante el curso 2020/21, lo que permite enriquecer la descripción de la propuesta con producciones del alumnado.

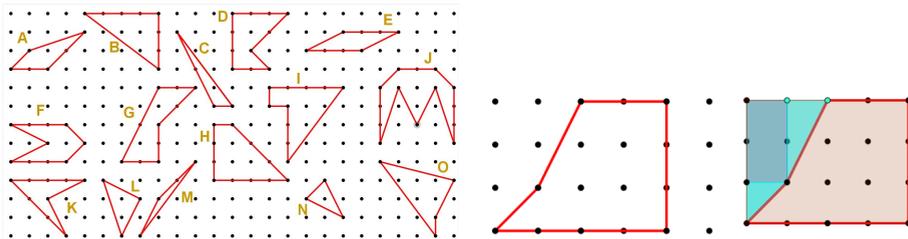
3.1. PRIMERA TAREA O SITUACIÓN INICIAL: RAZÓN DE SER

El enunciado de la tarea que se configura como razón de ser de toda la secuencia sería el siguiente:

Esto (figura 4) es un cuadrado de tipo $(3, 5)$. El primer número es el desplazamiento en horizontal que hacemos desde un punto fijo para hallar uno de los vértices del cuadrado. El segundo, el desplazamiento en vertical para obtener un vértice contiguo al anterior. Y así tenemos un lado del cuadrado. Encuentra el área de este cuadrado y explica cómo lo has hecho.

Esta tarea inicial, para alguien que ya conozca el teorema de Pitágoras, puede resultar trivial. Sin embargo, si nos ponemos en la piel de alguien que no conoce el teorema, la situación cambia. ¿Cómo encontraríamos el área de ese cuadrado *inclinado* del cual no me dicen cuánto mide su lado?

Estamos ante lo que puede considerarse el suelo bajo de esta secuencia. Es decir, es una tarea que todos pueden empezar, porque conecta con sus conocimientos previos de cálculo de áreas. Sin embargo, no está exenta de dificultades, y carencias en cuestiones tales como la conservación de la longitud afloran en este momento. Ejemplo de ello es que algunos alumnos señalan que el lado del cuadrado de la figura 4 mide 5 unidades. Otros, cuentan los puntos en lugar de los *cuadrados* de la trama. Esto es bastante habitual y es consecuencia de un trabajo poco rico en magnitudes y medida. Así, gran parte del alumnado apenas ha abordado situaciones de medida directa de áreas, tratando únicamente situaciones de medida indirecta de áreas a partir de longitudes (las *fórmulas* de las áreas). Dificultades como las que hemos mencionado persisten más allá de la educación obligatoria y autores como Nortes ([19]) nos recuerdan que la confusión entre perímetro y área se observa en alumnado de los grados de Magisterio.



(a) Figuras planas.

(b) Cálculo del área por «encapsulado».

Figura 5: Calculando áreas de manera directa.

No obstante, decíamos que era suelo bajo. Efectivamente, esta tarea podríamos llevarla a 4.º de Educación Primaria y trabajarla tranquilamente como una situación de medida directa de áreas. Esto fue algo que se hizo con estos grupos de alumnos el curso anterior, durante el confinamiento del curso 2019/2020 por la pandemia de COVID-19. En el contexto de una tarea en la que se terminaba conjeturando el teorema de Pick, el alumnado tuvo que medir áreas de figuras planas poligonales en una retícula (figura 5a). Para ello emplearon diversas técnicas: de manera directa contando *cuadraditos* a modo de unidad arbitraria de área, mediante descomposiciones, completando rectángulos y restando el área sobrante, duplicando la figura para hacer un paralelogramo, etc. En la figura 5b mostramos un ejemplo de cálculo del área de una de estas figuras encapsulándola en un rectángulo mayor, cuya área es sencilla de obtener y al que luego hay que sustraer las áreas del rectángulo sombreado y los dos triángulos.

Volviendo a la actividad inicial, en la figura 6 vemos dos formas diferentes de abordarla. Ambas parten de la idea de calcular el área del cuadrado que encapsula al cuadrado «complicado» del cual hemos de obtener el área y restarle luego el área sobrante. Es en el cálculo del área sobrante donde las técnicas de las figuras 6a y 6b difieren. En la primera, se han juntado dos a dos los triángulos rectángulos que rodean al cuadrado, para hacer dos rectángulos de área $15u$, siendo u la unidad de área de la trama cuadrada (el alumno la denomina u^2). En la segunda, en cambio, se intenta medir el área sobrante de manera directa por conteo de cuadraditos y recomposición. La técnica es válida, claro. Aunque no se aprecia, algún pequeño fallo condujo en este caso a un error en el resultado final. Sin embargo, lo interesante y lo que enriquece la secuencia es el poder comparar las estrategias, charlar en clase sobre ellas y decidir ventajas e inconvenientes. Lo de menos es decidir qué técnica es la mejor, sino los argumentos que aparecen. En este caso, la técnica de la figura 6b incide especialmente en la medida directa de áreas, por lo que conecta especialmente con experiencias previas.

En cuanto a la gestión de aula, toda la secuencia se realiza en pequeños grupos. Autores como Liljedahl ([16]) sugieren que lo mejor para fomentar la interacción es hacer agrupaciones aleatorias (y cambiantes) de tres alumnos. Sin embargo, en nuestro caso, la mayoría de las agrupaciones durante el curso en que se implementó esta secuencia fueron de dos alumnos, al tener que salvaguardar la distancia inter-

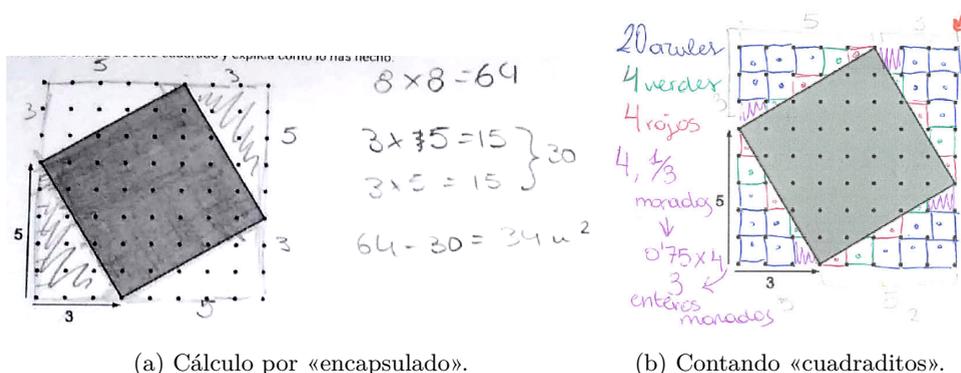


Figura 6: Dos técnicas distintas para calcular el área del cuadrado «inclinado».

personal según las recomendaciones sanitarias para el curso 2020/2021. De no ser así, las agrupaciones seguramente habrían sido como al comienzo del curso anterior, de tres o cuatro alumnos, con mesas enfrentadas dos a dos, a modo de islas.

Este tipo de consideraciones son importantes cuando el enfoque es a través de la resolución de problemas. Una clase típica puede comenzar con una actividad de *calentamiento* breve y que, en ocasiones, puede ser una oportunidad para conectar con lo hecho anteriormente. Después, se presenta la situación-problema que, aquí, es el cálculo del área de ese cuadrado *inclinado* y las siguientes que se irán sucediendo. Entonces el alumnado, en pequeños grupos, aborda el problema. No es tanto un aprendizaje cooperativo, entendido como aquel en el que cada grupo se reparte roles y hay que hacer un producto final, como discutir y compartir ideas. El docente se pasa por las mesas observando los argumentos, animando a la interacción, evitando adelantar conocimientos que pueden surgir, procurando hacer buenas preguntas. Idealmente, cada sesión termina con una puesta en común donde el docente puede aprovechar —cuando es necesario— para institucionalizar lo que ha surgido en clase. Sin embargo, dependiendo del transcurso de los acontecimientos y de la estructura de la secuencia, es posible que sea necesario organizar alguna otra puesta en común.

Hay diferentes estrategias para poner en común las producciones del alumnado, que, como estamos viendo, son las que articulan la secuencia y las que otorgan el carácter constructivo a esta. Liljedahl ([16]), por ejemplo, señala como buena práctica el tener pizarras en las paredes de la clase para que cada grupo pueda usarlas y que, al mismo tiempo, su pensamiento sea visible para el resto de los grupos. Otra forma, quizá menos ágil que la anterior, pero también operativa cuando no se dispone de dichas pizarras, es emplear un visor de documentos. Es un dispositivo que se conecta de forma rápida y cómoda al puerto USB del ordenador de clase y que permite coger el cuaderno de un alumno y comentar sobre su producción. Las imágenes de las figuras anteriores se obtuvieron de esta manera.

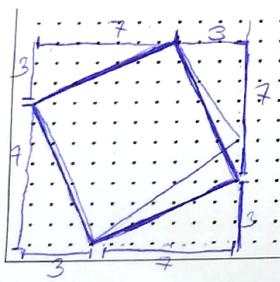


Figura 7: Dificultades al dibujar el cuadrado (3, 7) en el geoplano.

3.2. CONSOLIDACIÓN Y CAMINO HACIA LA GENERALIZACIÓN

Como en la secuencia se va a proponer el cálculo del área de cuadrados «inclinados» cualesquiera, vamos a ofrecer un andamiaje adecuado. Así, antes de continuar vamos a asegurarnos de que el alumnado sabe dibujar estos cuadrados inclinados y calcular el área:

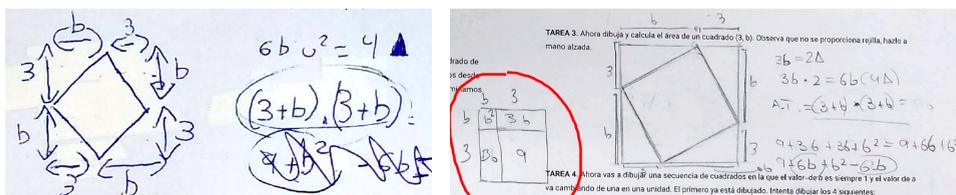
Dibuja en el geoplano los cuadrados (3, 7) y (2, 3) y calcula su área.

Como vemos en la figura 7, tampoco estamos ante una actividad trivial para el alumnado. La imagen que muestra esta figura, donde se aprecian los intentos realizados, es un buen ejemplo de lo que tendría que incluir un cuaderno de matemáticas, si es que consideramos a este como una herramienta de aprendizaje que refleje el pensamiento del alumno y su forma de hacer matemáticas ([1]). Al comentar esta producción, que no fue la única, en la puesta en común, la pregunta evidente es: ¿cómo sabemos que es un cuadrado? De nuevo, la oportunidad para conectar con conocimientos previos; en este caso, que todos los lados han de tener la misma longitud y ser perpendiculares dos a dos. No es que el alumnado de 2.º ESO no sepa qué es un cuadrado, sino que a lo mejor no ha tenido que reflexionar en los mismos términos que en esta actividad.

En la siguiente tarea, abandonamos el geoplano y, ahora sí, empezamos el camino hacia la generalización. Las conexiones, esta vez, serán con el pensamiento algebraico:

Dibuja a mano alzada un cuadrado de tipo (3, b) y calcula su área.

Aquí aparecen dos dificultades. La primera, dibujar el cuadrado (3, b) «general». Algún alumno llegó a dibujar una trama de puntos a modo de geoplano, a pesar de que en clase se discutió qué significaba eso de *a mano alzada*. No obstante, fue el cálculo del área sobre lo que más hubo que discutir. Para emplear las mismas técnicas que en las tareas anteriores, los alumnos tenían que comenzar calculando el área del cuadrado exterior que encapsula al de interés. Como es un cuadrado de lado $(b + 3)$, su área es $(b + 3)(b + 3) = (b + 3)^2$. Unos meses antes, en el mismo curso, estos alumnos trabajaron con expresiones de ese estilo en álgebra. Aunque de forma muy colateral y bastante intuitiva, ya que son más propias de 3.º ESO, se trabajaron empleando un modelo de área. Esto es algo que se puede observar en la figura 8b, donde se aprecia una descomposición del cuadrado en cuestión que se corresponde



- (a) Expresiones algebraicas para el área. (b) Nota con el cuadrado de una suma.

Figura 8: Dos producciones que muestran el cuadrado $(3, b)$.

con el desarrollo del cuadrado de una suma. Por este motivo, esta tarea tiene especial valor, ya que recupera algo ya visto con anterioridad y establece conexiones.

3.3. UN PATRÓN ESPECIAL

Ahora que ya sabemos dibujar cuadrados «generales» o cualesquiera (y aquí es evidente el apoyo que podría aportar un entorno de geometría dinámica [2]), vamos a plantear lo siguiente:

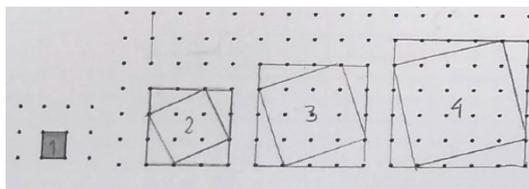
Dibuja una secuencia de cuadrados (a, b) en la que el valor de a siempre sea 1 y el valor de b vaya cambiando de una unidad en una unidad. El primero ya lo tienes dibujado, dibuja los cuatro siguientes. Después, responde a las siguientes cuestiones:

- *¿Puedes encontrar el área de cada uno?*
- *¿Puedes encontrar un método para encontrar el área de cualquiera?*
- *Calcula el área de los primeros seis cuadrados obtenidos con el mismo método.*
- *¿Qué observas en esta serie de números que representan las áreas de estos cuadrados?*

Previamente se han trabajado todos los conocimientos y competencias necesarios para abordar estas preguntas. Así, para la primera, el alumnado cuenta con las técnicas discutidas en las dos primeras tareas de la secuencia para el cálculo de áreas y ya ha practicado el dibujo de estos cuadrados «inclinados» descritos con la notación introducida para ello. En este caso, la secuencia o sucesión de cuadrados toma la forma de lo que se aprecia en la figura 9. Ante un bloqueo en la segunda pregunta, que implica reconocer el patrón de generalización, los alumnos pueden seguir calculando las áreas de manera directa con la técnica que consideren oportuna. Algunos grupos de alumnos necesitarán tener delante más cuadrados con su área calculada y otros menos. En cualquier caso, la siguiente pregunta incide en esta generalización, poniendo a prueba la conjetura a la que hayan llegado.

La sucesión de áreas para los cuadrados de la figura 9 es

$$1, 2, 5, 10, 17, \dots$$

Figura 9: Sucesión de cuadrados $(1, b)$ en el geoplano.

	a	0	1	2	3	4	COMENTARIOS
b							
0		0	1	4	9	16	
1		1	2	5	10	17	
2		4	5	8	13	20	
3		9					
4							

Figura 10: Tabla donde se recogen los datos. Momento intermedio de la puesta en común.

En este momento ya hay algunos alumnos que utilizan un «atajo» para calcular estas áreas: «Sí, es siempre hacer el cuadrado del número que cambia y sumar uno». La siguiente tarea estructura más estas reflexiones y propone recopilar las áreas calculadas en una tabla, donde además de ir dando valores a b , se modifica también la otra variable, a , siendo la sucesión de áreas de la tarea anterior la columna correspondiente a $a = 1$. La figura 10 muestra esta tabla, proyectada en la pizarra en el transcurso de una puesta en común después de que el alumnado tuviera tiempo de discutirla. La hoja de trabajo que tenía el alumnado incluía esta misma tabla, donde en la columna de comentarios podían anotar sus reflexiones y observaciones.

Es importante que las observaciones surjan del alumnado para que este desarrolle una actitud de indagación propia de la actividad matemática. Además, de esta manera, incidimos en el carácter constructivo de la matemática. Algunas observaciones que aparecen ante la tabla de la figura 10 y que dan lugar a una charla de aula: «La fila esta es como la anterior sumando cuatro», «Aquí se está sumando b al cuadrado», etc. Al mismo tiempo, la charla se enriquece con preguntas como estas que proporcionan un mayor andamiaje:

- ¿Puedes construir la siguiente fila (la correspondiente a $b = 5$)?
- ¿Y la fila correspondiente a b con valor 10?
- ¿Y ahora puedes escribir cuál será el área para un cuadrado de tipo (a, b) ?

En este punto de la secuencia estamos en pleno proceso de formalización de la idea central del teorema de Pitágoras, de tal manera que aparecen consideraciones acerca de longitudes y áreas, expresadas con un lenguaje algebraico que se introduce de forma progresiva y conectando con experiencias previas y tareas concretas. Para

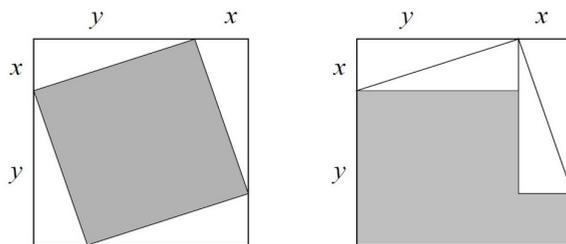


Figura 11: Tarea final de la construcción del teorema de Pitágoras. Fuente: Shell Centre.

terminar de enlazar con la tarea inicial y, a modo de recapitulación, se propone dibujar un cuadrado general (a, b) en el geoplano y obtener el área con lo aprendido hasta ahora.

Sin embargo, todavía no está completa la construcción del teorema de Pitágoras. Para ello se propone la siguiente tarea:

Compara las áreas de la parte sombreada (figura 11) y explica el método que has usado para compararlas.

- *Si las dos áreas analizadas arriba son iguales, entonces discute con tus compañeros qué observas y escribe tus conclusiones.*
- *Si ahora pensamos en que el lado del cuadrado gris de la figura de la izquierda mide z , indica cuánto es el área de ese cuadrado y escribe de nuevo las conclusiones del apartado anterior.*

Efectivamente, las áreas de los cuadrados externos de ambas figuras son iguales, porque son cuadrados con lado de la misma longitud $(x + y)$. Como los triángulos rectángulos en blanco son también iguales en ambas figuras, el área de la superficie sombreada en gris ha de conservarse. Además, en la segunda figura la superficie sombreada puede descomponerse de forma bastante evidente en dos cuadrados, uno de lado x y otro de lado y . Por lo tanto, el área del cuadrado inclinado de la primera figura es $x^2 + y^2$. Esto proporciona otro punto de vista a lo realizado hasta el momento.

La segunda pregunta nos propone expresar el área del cuadrado de la izquierda a partir de su lado, que denotamos con z . Así, su área es z^2 y podemos concluir que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Y ahora es cuando podemos ponerle nombre a lo que hemos hecho:

Érase una vez un matemático llamado Pitágoras que, en torno al siglo VI a.C., le daba vueltas a estas cosas. . .

4. CONTINUACIÓN: OTRAS PRUEBAS, APLICACIONES, RECÍPROCOS

La propuesta no se ha centrado en un aspecto exclusivo del teorema, sino que ha tratado de conjugar elementos de medida y geometría con elementos algebraicos. De esta manera, procura evitar que el alumnado asocie de forma biunívoca el teorema con su expresión algebraica, o con una relación entre lados de un triángulo rectángulo, o como una relación de áreas. De hecho, algunos autores de los mencionados en la sección de antecedentes ([12]) señalan la fuerte influencia del lenguaje empleado en la secuencia didáctica con el significado que terminan asociando los alumnos al teorema.

Ahora bien, el teorema de Pitágoras va mucho más allá. Antes de pasar a las aplicaciones, puede resultar interesante ver que hay más caminos para llegar al mismo resultado. La actividad de NRIC «Pythagoras proofs» (<https://nrich.maths.org/6553>) propone tres de ellas, a las que añadimos una más clásica y que no es más que una recomposición diferente de la que se vio en la secuencia. La dinámica de esta actividad fue diferente a la seguida hasta ahora. Como, por un lado, no es cuestión de abordar todas las pruebas existentes del teorema de Pitágoras y, por otro lado, el tiempo lectivo del que disponemos es limitado, se propuso que cada grupo de dos o tres alumnos trabajara únicamente en una de las pruebas. Después, expondrían los argumentos que sustentan la misma, para que todos pudieran participar del razonamiento y las peculiaridades de cada una. La actividad se presenta de la siguiente manera:

Ahora ya sabes que el teorema célebre de la actividad anterior se conoce como el teorema de Pitágoras. Pero ¿qué significa exactamente? Te vamos a proponer varias pruebas (figura 12). ¿Cuál te parece más convincente? ¿Cuál te resulta más fácil de entender? ¿Cuál te resultaría más fácil de explicar? Discútelo con tu grupo antes de ponerlo en común con todos los compañeros.

Las pruebas en cuestión eran las siguientes:

Prueba n.º 1. *Dibuja un cuadrado y marca un punto a una distancia fija de cada esquina (figura 12a). Traza una recta desde cada uno de estos puntos a la esquina más cercana del lado opuesto. Recorta las piezas marcadas en azul y reorganízalas para formar una «L» como la de la derecha. Usa tus recortes para probar el teorema de Pitágoras.*

Esta prueba se fundamenta en una relación de áreas, al igual que la desarrollada en la secuencia de inicio, pero es diferente. El alumnado la recorta para armar el puzle y comprobar, efectivamente, que con las piezas resultantes se puede formar la figura en cuestión. Para expresar el teorema hay que tener en cuenta que el lado del cuadrado de la izquierda es c , medida de la hipotenusa de cada uno de los triángulos rectángulos que se observan en la figura central de la figura 12a. La superficie de la figura de la derecha se puede descomponer en dos cuadrados, de lados a y b , catetos de los triángulos rectángulos mencionados, por lo que tenemos $a^2 + b^2 = c^2$.

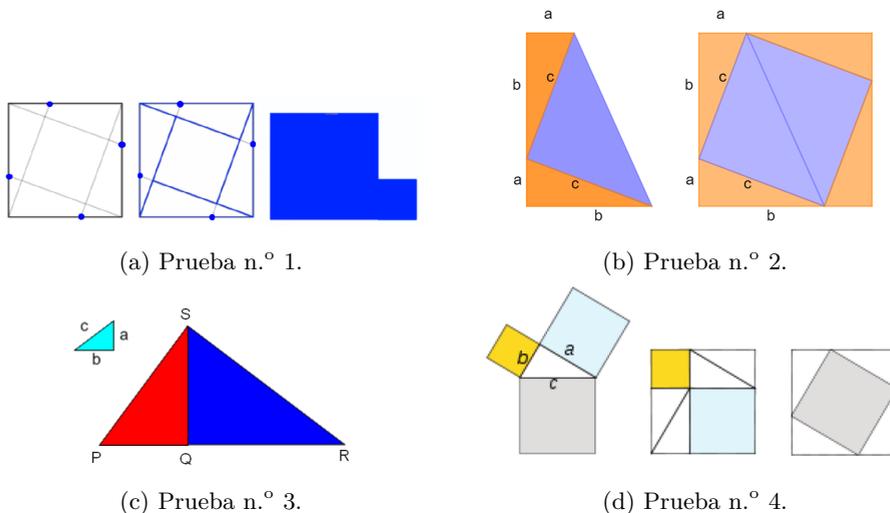


Figura 12: Actividad de extensión sobre las pruebas de Pitágoras. Fuente: adaptado de NRICH.

Prueba n.º 2. *Observa el trapecio de la figura 12b y cómo lo rotamos para hacer un cuadrado.*

- a) *Escribe la expresión del área del cuadrado grande de la derecha.*
- b) *Utiliza la expresión obtenida en a) para calcular el área del trapecio inicial.*
- c) *Averigua el área del trapecio inicial. Esta vez, sumando las áreas de los tres triángulos rectángulos que se observan en él.*
- d) *Utiliza los resultados de los apartados a, b y c para dar una prueba del teorema de Pitágoras, explicando cada uno de los pasos.*

De nuevo, la prueba se fundamenta en una relación de áreas. En la página de la actividad de NRICH se proporciona un *applet* dinámico que duplica el trapecio original y lo rota para construir el cuadrado, con lo cual se enfatiza más el hecho de que el área del cuadrado es el doble que la del trapecio. Una forma de utilizar esta construcción, por tanto, es partir de que el área del cuadrado es $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, mientras que la del trapecio inicial, sumando las áreas de cada triángulo, es igual a $(ab)/2 + (ab)/2 + c^2/2$. La manipulación algebraica necesaria para comprobar a partir de aquí que $a^2 + b^2 = c^2$ fue fuente de algunas dificultades para los grupos que optaron por esta demostración.

Prueba n.º 3. *Considera un triángulo rectángulo cualquiera de lados a , b y c . Auméntalo por un factor de escala a para hacer el triángulo PQS y por un factor de escala b para hacer el triángulo QRS . Une ambos como se indica en la figura 12c y responde a las siguientes preguntas:*

- a) *Demuestra que los podemos unir de esa manera y que el triángulo que se forma (PRS) es igual al original aumentado en un factor de escala c.*
- b) *Utiliza lo observado en el apartado anterior para probar el teorema de Pitágoras.*

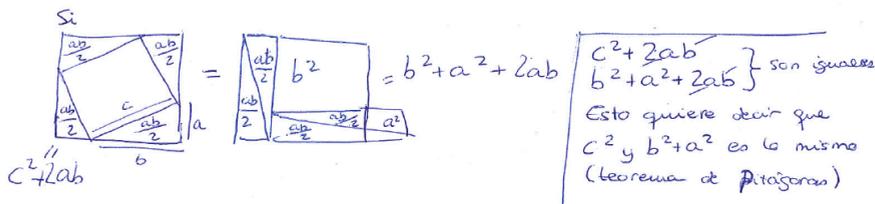
Esta prueba es de diferente naturaleza a las anteriores, ya que se fundamenta en la proporcionalidad geométrica. Sintetizando, los triángulos aumentados por esos factores de escala se pueden unir así porque tienen un lado de la misma longitud ab . Los catetos del triángulo rectángulo «combinado» miden ca y cb , por lo que, por semejanza, la hipotenusa mide c^2 . Pero esta última también puede expresarse como $a^2 + b^2$, por lo que $a^2 + b^2 = c^2$ (ver la producción de un alumno que se muestra en la figura 13b).

Prueba n.º 4. *Observa la figura 12d. A partir de la primera figura se han construido dos cuadrados. ¿Cómo es el área de esos cuadrados? ¿Qué observas si les quitamos los triángulos rectángulos?*

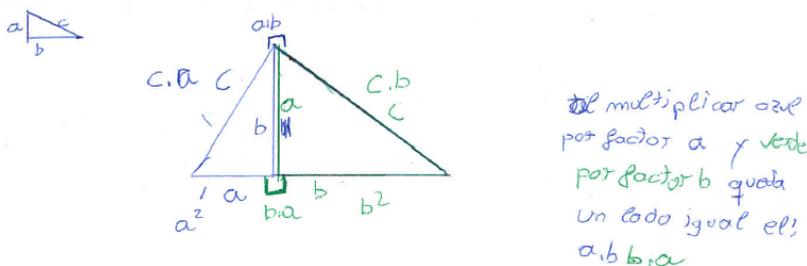
Por último, una prueba basada en la relación de áreas, con una disposición visual más típica. Evidentemente, ambos cuadrados tienen la misma área y el alumnado puede utilizar lo visto en la secuencia para justificar el teorema.

En cuanto a las actividades de aplicación, se trata de conjugar la utilización del teorema para el cálculo de longitudes desconocidas con otros aspectos de este. De esta manera, se puede aprovechar para abordar la cuestión del recíproco y de lo que ocurre con triángulos que no son rectángulos. Es decir, por un lado, que si no se cumple el teorema, el triángulo no es rectángulo y, por otro lado, que el cuadrado del lado mayor será mayor o menor que la suma de los cuadrados de los otros dos, dependiendo de si el triángulo es obtusángulo o acutángulo, respectivamente. No obstante, se puede aprovechar, como hicimos, para plantear alguna tarea más rica y abierta, como las propuestas en el blog del recientemente fallecido Don Steward (<https://donsteward.blogspot.com>). NRIC se hace eco de la actividad titulada «Garden shed» (<https://nrich.maths.org/11190>), la cual tuvimos ocasión de plantear en clase y que llega a poner sobre la mesa razonamientos intuitivos sobre optimización.

Finalmente, merece la pena hacer una breve mención a la evaluación. El diseño de la secuencia se apoya fuertemente en la evaluación formativa, pues en cada una de las tareas que se realizan se reservan momentos para la interacción a diferentes niveles (entre alumnos, profesor y pequeños grupos, todos en común) que proporciona gran cantidad de *feedback* y evidencias de aprendizaje. Estas evidencias se complementan con una prueba final, de carácter cualitativo y sujeta también a un proceso de revisión y mejora, en la que se plantean tres cuestiones que permiten reflejar los significados personales del alumnado. Una de ellas es la resolución de la actividad «razón de ser», es decir, el cálculo del área de un cuadrado «inclinado» en la trama del geoplano. Otra, un problema de aplicación. Y, por último, argumentar una de las pruebas más trabajadas en clase y aportar la que más les haya llamado la atención. En la figura 13 vemos dos de estas pruebas, una basada en áreas y otra en semejanza.



(a) Justificación basada en la relación de áreas.



(b) Justificación basada en triángulos semejantes.

Figura 13: Justificaciones aportadas por dos alumnos en la prueba de evaluación.

5. CONCLUSIÓN

Se ha descrito una secuencia didáctica para introducir el teorema de Pitágoras de forma constructiva, a través de la resolución del problema del cálculo del área de cuadrados cualesquiera cuyos vértices forman parte de una rejilla cuadrada. Este problema se configura en razón de ser del teorema y, mediante un proceso de generalización que va introduciendo de forma progresiva el lenguaje algebraico, establece conexiones con el conocimiento previo del alumnado al respecto. Aunque esta tarea inicial conjuga ya diversos aspectos del teorema, relacionando su expresión algebraica con el cálculo de áreas y las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, se proponen tareas adicionales que permiten asomarse a otros significados del teorema, con pruebas de carácter diferente y problemas de aplicación.

En consonancia con lo que sugieren todos los autores mencionados en la sección de antecedentes, la enseñanza del teorema no puede reducirse a uno solo de sus significados. Mucho menos, a exponer el primer día la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ y realizar unos pocos ejercicios de aplicación. Además, la oportunidad para conectar con las ideas de conjetura y prueba es clara. Por otro lado, como señalan Lesh y Zawojewski ([13]) o Lester y Cai ([14]), si pretendemos que nuestro alumnado desarrolle su competencia en resolución de problemas en matemáticas, hay muy poca evidencia de que lleguen a mejorar en este aspecto separando la resolución de problemas del aprendizaje de conceptos. Se trata, por tanto, de que la resolución de problemas forme parte central del quehacer diario en clase de matemáticas, que se aprenda a través de la resolución de problemas. No solo porque así conseguiremos

alumnado más competente resolviendo problemas y más implicado, sino porque las matemáticas no se pueden reducir a la aplicación mecánica de técnicas concretas para ejercicios específicos ([3]).

AGRADECIMIENTOS. Este trabajo se ha desarrollado en el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo). Especialmente, debo agradecer a mi compañera en el CPI Val de la Atalaya, Ana Isabel Martínez Pérez, por las conversaciones sobre esta y tantas otras secuencias didácticas. Agradezco también los comentarios de Sergio Martínez-Juste y José M.^a Muñoz-Escolano, así como la invitación y las sugerencias de la editora de la sección, Luisa Cuadrado.

REFERENCIAS

- [1] M. ARCE, El cuaderno de matemáticas: un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **21** (2018), n.º 2, 367–387.
- [2] A. ARNAL-BAILERA, *Mediación tecnológica en la enseñanza y el aprendizaje de Geometría con grupos de riesgo: Estudio múltiple de casos*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2013.
- [3] P. BELTRÁN-PELLICER Y S. MARTÍNEZ-JUSTE, Enseñar a través de la resolución de problemas, *Suma* **98** (en prensa).
- [4] M. C. CAÑADAS, Demostraciones del teorema de Pitágoras para todos, *Actas de las jornadas Investigación en el aula de matemáticas: atención a la diversidad*, 111–116, Universidad de Granada y SAEM Thales, 2001.
- [5] P. CHAMBERS, Teaching Pythagoras' theorem, *Mathematics in School* **28** (1999), n.º 4, 22–24.
- [6] D. CRAWFORD, Pythagoras' theorem: More than just a square rule, *Mathematics in School* **30** (2001), n.º 1, 14–17.
- [7] C. FERNANDEZ Y M. YOSHIDA, *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*, Lawrence Erlbaum, 2004.
- [8] J. D. GODINO, B. GIACOMONE, M. R. WILHELMI, T. F. BLANCO Y Á. CONTRERAS, Evaluando la competencia de análisis epistémico de profesores de matemáticas, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (A. Engler y A. Castro, eds.), 885–893, CLAME, 2016.
- [9] N. GÜNER, How to teach the pythagorean theorem: An analysis of lesson plans, *Journal of Faculty of Educational Sciences* **51** (2018), n.º 1, 119–141.
- [10] R. HUANG Y F. K. S. LEUNG, How Pythagoras' theorem is taught in Czech Republic, Hong Kong and Shanghai: A case study, *ZDM* **34** (2002), n.º 6, 268–277.
- [11] I. HUGENER, C. PAULI, K. REUSSER, F. LIPOWSKY, K. RAKOCZY Y E. KLIE-ME, Teaching patterns and learning quality in Swiss and German mathematics lessons, *Learning and Instruction* **19** (2009), n.º 1, 66–78.

- [12] E. KLIEME, C. PAULI Y K. REUSSER, The Pythagoras study: Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classroom, *The Power of Video Studies in Investigating Teaching and Learning in the Classroom* (T. Janík y T. Seidel, eds.), 137–160, Waxmann, Münster, 2009.
- [13] R. LESH Y J. S. ZAWOJEWSKI, Problem solving and modeling, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (F. Lester, ed.), 763–804, Information Age Publishing, Charlotte, NC, 2007.
- [14] F. K. LESTER Y J. CAI, Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research, *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education* (P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick, eds.), 117–135, Springer, 2016.
- [15] Y. LI Y R. HUANG, *How Chinese Teach Mathematics and Improve Teaching*, Routledge, 2013.
- [16] P. LILJEDAHL, *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*, Corwin, 2020.
- [17] F. LIPOWSKY, K. RAKOCZY, C. PAULI, B. DROLLINGER-VETTER, E. KLIEME Y K. REUSSER, Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean theorem, *Learning and Instruction* **19** (2009), n.º 6, 527–537.
- [18] E. S. LOOMIS, *The Pythagorean Proposition*, National Council of Teachers of Mathematics, 1968.
- [19] A. NORTES CHECA, El teorema de Pick o el teorema de Pitágoras, ¿cuál aplicar?, *Números* **100** (2019), 73–77.
- [20] L. RICO, Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática, *PNA* **4** (2009), n.º 1, 1–14.
- [21] J. C. SPARKS, *The Pythagorean Theorem: Crown Jewel of Mathematics*, AuthorHouse, Bloomington, IN, 2008.
- [22] SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION, *The language of functions and graphs*, 1985. Disponible en <https://www.mathshell.com/materials.php?item=lf&series=tss>
- [23] SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION, *Discovering the Pythagorean Theorem*, Mathematics Assessment Project, 2015. Disponible en <https://www.map.mathshell.org/download.php?fileid=1698>
- [24] J. TROYANO Y P. FLORES, Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras, *Épsilon* **33** (2016), n.º 3(94), 51–60.
- [25] Y. YANG, How a Chinese teacher improved classroom teaching in Teaching Research Group: A case study on Pythagoras theorem teaching in Shanghai, *ZDM* **41** (2009), n.º 3, 279–296.