Enseñar a través de la resolución de problemas

Pablo Beltrán-Pellicer[1,2] & Sergio Martínez-Juste[1,3]

pbeltran@unizar.es sergiomj@unizar.es

[1]Universidad de Zaragoza

[2]CPI Val de la Atalaya (María de Huerva) [3]IES Pilar Lorengar (Zaragoza)

Versión post-print. Cítese como: Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, *98*, 11-21.

Resumen

Describimos las características de un enfoque de enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas, cuya esencia reside en que el contenido emerge de las situaciones y problemas que se proponen al alumnado. A partir de nuestra experiencia, realizamos un recorrido por los diversos bloques del currículo para ilustrar cómo son las tareas, la organización de aula y el papel del profesor para proporcionar el andamiaje necesario. Ofrecemos también alguna idea para, ante un posible confinamiento, mantener la coherencia con esta manera de concebir la enseñanza y el aprendizaje.

Palabras clave: resolución de problemas, actividades ricas, atención a la diversidad, inclusión.

Through problem solving

Abstract

We describe the fundamentals of teaching mathematics through problem solving, the essence of which is that the content emerges from the situations and problems that are proposed to students. Based on our experience, we walk through the curriculum to illustrate what the tasks are like, the organization of the classroom and the role of the teacher in providing the necessary scaffolding. We also offer some ideas to face a possible lock down, due to a pandemic scenario, to maintain coherence with this way of conceiving teaching and learning.

Keywords: problem solving, rich tasks, attention to diversity, inclusion.

Esta no es la primera vez que se escribe sobre la enseñanza a través de la resolución de problemas. Tampoco será la última. Lo que pretendemos no es más que compartir nuestra experiencia en torno a esta concepción de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Pensamos que es algo necesario, ya que es una cultura de aula que pocos han tenido la oportunidad de vivir como estudiantes. Y es que, aunque parezca una obviedad decirlo, los profesores tendemos a repetir los modelos de enseñanza que hemos vivido como alumnos, otorgándoles el crédito de nuestro propio éxito (Wright, 2017). ¿Quién no ha oído decir aquello de: «Los de la EGB no hemos salido tan mal y estábamos 40 en clase»?

¿Qué es enseñar *a través de* la resolución de problemas?

El enfoque de enseñanza que presentamos sigue un modelo de constructivismo guiado basado en la enseñanza *a través de* la resolución de problemas, que está íntimamente ligado con el aprendizaje basado en problemas (Lopes y Costa, 1996), pero que se introduce como alternativa a los enfoques *para* y *sobre* la resolución de problemas (Bingolbali y Bingolbali, 2019; Gaulin, 2001).

La enseñanza *para* la resolución de problemas tiene una concepción instrumental de la educación matemática. En este modelo de enseñanza, tras la exposición del conocimiento, los estudiantes lo aplican para resolver problemas. Por otro lado, la enseñanza s*obre* la resolución de problemas se centra en estrategias generales y el uso de heurísticos para la resolución de problemas matemáticos. En cambio, en el enfoque de enseñanza *a través de* la resolución de problemas los alumnos adquieren el conocimiento enfrentándose a la resolución de problemas diseñados por el profesor con la intención de hacer emerger los contenidos matemáticos deseados.

El proceso de enseñanza a través de la resolución de problemas sigue una secuencia similar a la siguiente:

- Los escolares se enfrentan a situaciones problemáticas sin haber recibido instrucción previa sobre los contenidos que quieren enseñarse.

- Los problemas deben promover la reflexión y la indagación hacia la búsqueda de estrategias que permitan resolverlos.

- El profesor utiliza las respuestas de los alumnos para organizar una puesta en común que permita introducir los nuevos conceptos.

- Por último, los alumnos resuelven problemas para afianzar los nuevos contenidos.

Por tanto, este enfoque no excluye la enseñanza de heurísticos y la aplicación de contenidos, sino que los contiene. Además, ha ganado relevancia en la investigación en educación matemática en las últimas décadas (English y Gainsburg, 2015) como alternativa a aproximaciones «primero concepto y después aplicación» y su uso es efectivo para el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Bingolbali y Bingolbali, 2019).

En la enseñanza a través de la resolución de problemas es fundamental la interacción. Lo ideal es trabajar las actividades en grupos de tres o cuatro alumnos (Figura 1). Un número mayor aumenta la probabilidad de que alguno de ellos se descuelgue. En el otro extremo, un trabajo por parejas reduce las interacciones entre estudiantes y dificulta el trabajo del docente. Durante el desarrollo de la actividad, el profesor se pasea por la clase, observando el trabajo de cada grupo y realizando actuaciones concretas que permiten proseguir en la tarea. Si en lugar de grupos de cuatro tenemos parejas, el profesor debe intervenir el doble de veces, lo cual es ineficaz. No obstante, en clases no habituadas a este enfoque y con alumnado disruptivo, se puede ser flexible. En cualquier caso, no se trata de hacer las agrupaciones atendiendo a criterios como el rendimiento académico, sino de que los grupos funcionen.

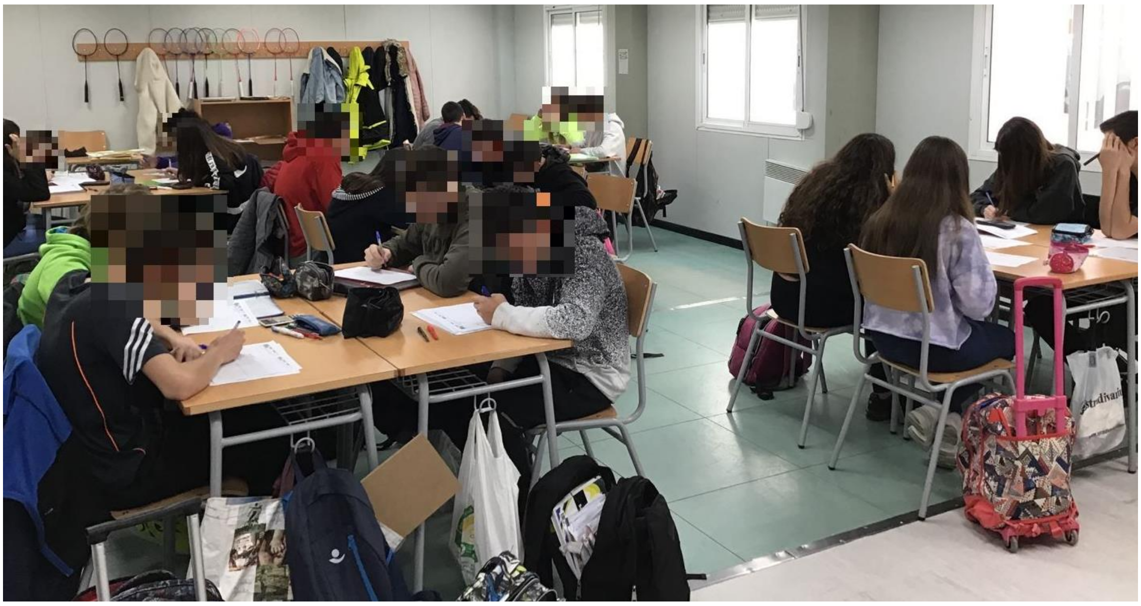


Figura 1. Organización de la clase.

Es complicado etiquetar la práctica docente de uno mismo. Una misma secuencia, con matices, podría ubicarse en el aprendizaje a través de la resolución de problemas de la misma manera que en el aprendizaje por descubrimiento guiado. Sin embargo, existe un componente innegable de construcción de conocimiento y un andamiaje por parte del profesor. Es decir, que haya construcción de conocimiento no implica dejar a los alumnos solos. Ciertas referencias que suelen citarse para apoyar la instrucción explícita obvian este andamiaje (Hmelo-Silver, Duncan, y Chinn, 2007). La clase, como veremos, se detiene cada cierto tiempo para hacer puestas en común donde se negocian los significados de los objetos matemáticos que van apareciendo. Con esto se consigue, por un lado, una propuesta ética de enseñanza. Por otro, se cede responsabilidad al alumnado, que pasa a hacer matemáticas, en lugar de limitarse a practicar, repetir y, con suerte, aplicar.

Creemos que la mejor forma de comprender este modelo para la enseñanza de las matemáticas es experimentándolo. Así, para que el lector interesado pueda acercar sus clases a este enfoque, en las siguientes secciones damos algunas ideas que utilizamos para diseñar y gestionar secuencias de aprendizaje que hemos llevado a la práctica en nuestras aulas de 1º y 2º de ESO.

Estadística

Comenzamos nuestra andadura por los bloques curriculares con un pequeño homenaje a los magníficos materiales que, al amparo de la reforma educativa de la LOGSE, se generaron durante los años 90. En concreto, vamos a comentar el desarrollo de una actividad adaptada de la Guía Praxis, donde se incluye una propuesta para introducir la dispersión, titulada «Un extraño equipo de baloncesto» (Borrell, Pol y Saguer, 1998). Con el currículo actual, la secuencia está dirigida a alumnado de 2º de ESO. La clase comienza planteando al alumnado lo siguiente:

> Estamos en un partido de baloncesto. Pongamos que se trata de una final, que queda un minuto y que el entrenador tiene que decidir a qué jugadora sacar.

Después de una breve charla de clase, que aprovechamos para discutir acerca de los datos que necesitaríamos, viene la pregunta que se constituye en razón de ser de la secuencia:

> Vamos a intentar averiguar a quién sacaría si va perdiendo de 8 puntos y a quién sacaría si va ganando de 2 puntos, y tenemos como datos los porcentajes de acierto.

En otras palabras, la decisión que debe tomar el entrenador, con los datos disponibles, es si sacan al mismo tipo de jugadora cuando se va ganando por poco que cuando el partido está prácticamente perdido, pero con alguna posibilidad de ganar. ¿Y qué datos son esos? Pongamos que disponemos del porcentaje de aciertos de tiro exterior de cinco jugadoras durante los últimos diez partidos. Es decir, la Tabla 1, que se proporciona al alumnado en una ficha.

Tabla 1. Datos de porcentajes de acierto que se proporcionan al alumnado. Fuente: Borrell y otros (1998).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
María	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44
Clara	61	54	56	64	58	47	52	74	60	54
Alba	66	46	61	59	73	47	56	53	61	58
Sonia	57	53	66	59	56	52	59	61	45	72
Laura	49	70	57	65	52	46	60	58	73	50

La primera cuestión sirve para entrar en calor y ver que hemos entendido el contexto, así como para intuir que la decisión no es sencilla: «¿En qué partidos podemos decir que Alba tiene un buen rendimiento?». No se trata de lanzar la pregunta y obtener una respuesta inmediata. Hay que ir con calma. Los alumnos discuten y trabajan en sus grupos sobre la situación. Cada alumno registrará en su cuaderno la actividad realizada, de manera que no se trata tanto de terminar con una producción única como de que cada uno, a partir de las interacciones, desarrolle la situación.

Entonces, el profesor se pasea por los grupos. Su papel no es el de desvelar *la respuesta*, si es que la hay, sino el de mantener vivas las discusiones. Su papel, como se señala en los estupendos materiales del Shell Centre, es el de moderador o facilitador; ocasionalmente, de un interrogador o un provocador; pero nunca un juez o un certificador (Swan, 1985, p. 247). Al preguntar, debemos evitar cuestiones cerradas que puedan responderse con monosílabos; y tratar de construir esas preguntas a partir de alguna discusión iniciada por los alumnos. En este caso, dependiendo de cómo sean esas discusiones de grupo, se puede plantear «¿Cómo podemos distinguir entre un buen rendimiento o un mal rendimiento?» o «Está claro que en algunos partidos no ha sido la mejor, pero ¿eso significa que ha tenido un mal rendimiento?»

La actividad continúa y la intervención de algún alumno da pie a estudiar el rendimiento medio de cada jugadora. Y aquí viene una sorpresa, todas tienen la misma media de porcentaje de acierto. En el material del alumno se les invita a continuar explorando visualmente la situación, generando producciones como las que mostramos en la Figura 2.

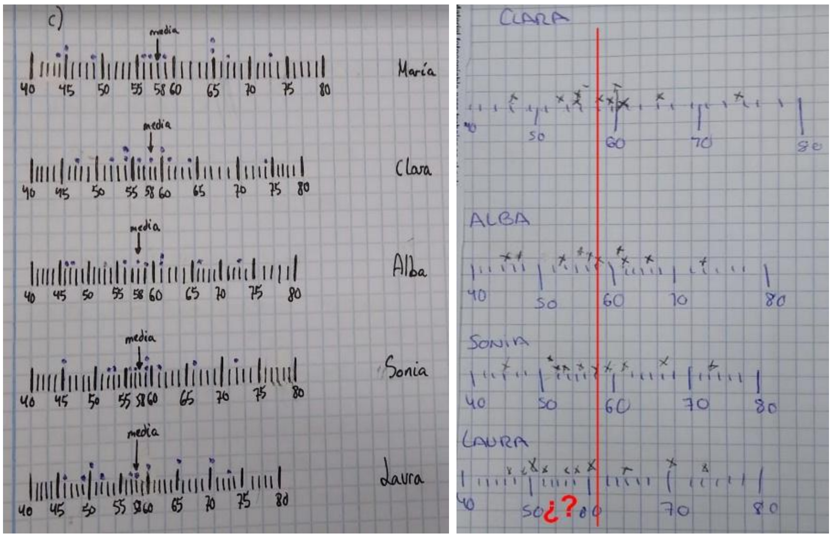


Figura 2. Diagramas que muestran la dispersión de los datos de forma intuitiva.

Estos gráficos proporcionan un primer acercamiento, intuitivo, a la dispersión. A pesar de que tienen un ejemplo de diagrama para una jugadora, como los alumnos trabajan de forma autónoma, las producciones son variadas y, en la puesta en común, se discuten aspectos como la necesidad de que estén alineados los ejes (Figura 2, derecha) o la utilidad de diferenciar por colores (Figura 3). En cualquier caso, la conclusión es que nos hace falta algo más que estos diagramas.

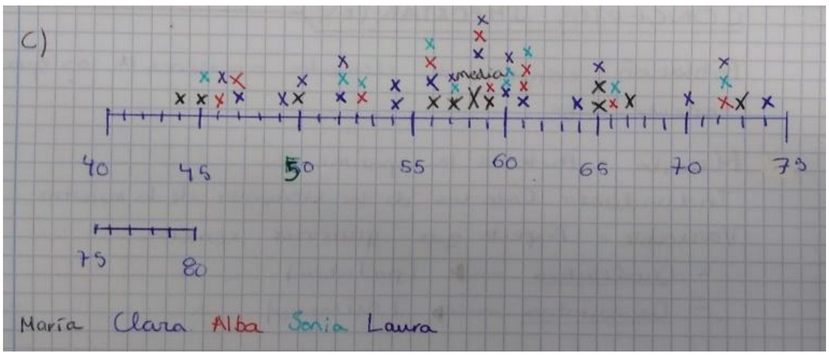


Figura 3. Representación alternativa de la dispersión, con un código de color diferente para cada jugadora.

La puesta en común se aprovecha para discutir cómo se puede continuar. Ya que visualmente no hemos podido decidirnos, trataremos de utilizar un número. Es posible, incluso, que surja la palabra *rango*. De nuevo, cada grupo trabaja sobre ello. Observan que son rangos muy similares y abordan tareas que ponen de manifiesto que el rango no ofrece una buena medida de la dispersión (Figura 4).

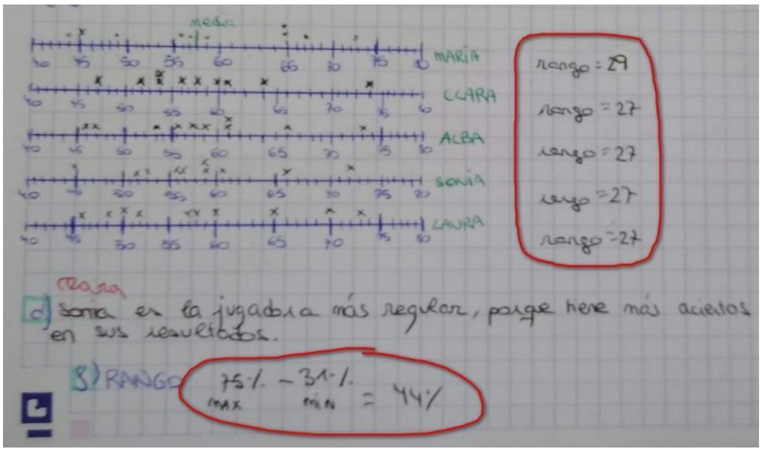


Figura 4. Actividad sobre el rango.

La secuencia continúa visitando diferentes medidas de la dispersión y justificando su razón de ser: desviación media, varianza y desviación típica. Una tras otra, se van poniendo en común las propiedades que surgen en cada tarea, a partir de las producciones de los alumnos. Señales de que vamos bien son preguntas como «A todo esto, ¿qué es la dispersión?, ¿la varianza?», que dan pie a diferenciar entre dispersión y formas de medir la dispersión. Por supuesto, al final hay que decidir a quién elegimos y por qué. Dejamos esto como ejercicio para el lector.

Es habitual pensar que, ante la presión de realizar algún trabajo en grupo, el bloque de estadística y probabilidad es el más propicio (Pierce y Chick, 2011). De hecho, por esto hemos elegido esta actividad sobre dispersión y no el clásico proyecto de estadística. En cualquier caso, ¿qué hacemos con el resto de los bloques de contenido? La respuesta es sencilla, lo mismo.

Fracciones

El profesor entra a clase cargado de tiras de papel, cartulinas, folios, y los alumnos lo miran extrañado. Entonces dice: «Hoy vamos a medir como medían los egipcios». Así empieza la secuencia didáctica para la fracción en 1º de ESO, donde el alumnado se enfrenta a actividades reales (no solo realistas) de medida. En otras palabras, tienen que *medir* y *construir* objetos reales. El docente lleva preparados los objetos a medir y muchas copias en material manipulable de la unidad de medida, para que a lo largo de la secuencia se dé significado de medida a la representación fraccionaria de los números racionales. A partir de ahí, se justificará el orden, las operaciones básicas y, lo más importante, se desarrollará la noción de que estamos ante un nuevo tipo de número.

Las tiras de papel conllevan el uso de la magnitud longitud, que es la más adecuada para empezar en primaria, o en secundaria si no se ha trabajado previamente este tipo de manipulaciones. Sin embargo, hay otras opciones, y, por ejemplo, el trabajo con superficies es mucho más rico.

En el caso de trabajar con longitudes, resulta que el largo de un DIN-A4 se aproxima a la medida entre la muñeca y el codo. Decimos que esa era la unidad de medida de los egipcios y que se llamaba *codo sagrado* o *bu*. Es necesario preparar objetos longitudinales (tiras de tela, papel, …) de manera que se puedan obtener sus medidas como una fracción del codo sagrado. En la Figura 5 observamos estudiantes calculando la medida de la tira verde, que mide 5/4 *bu*. Para obtener la medida, han dividido la unidad, el *bu*, en 4 partes iguales, y han necesitado 5 de ellas para medir la tira verde. Así, el 4 ya no es solo el denominador, sino que es el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad. Las subunidades de medida, en este caso, reciben el nombre de *cuartos*. El numerador es el número necesario de estas subunidades para medir el objeto.

Figura 5. Estudiantes calculando la longitud de diferentes objetos.

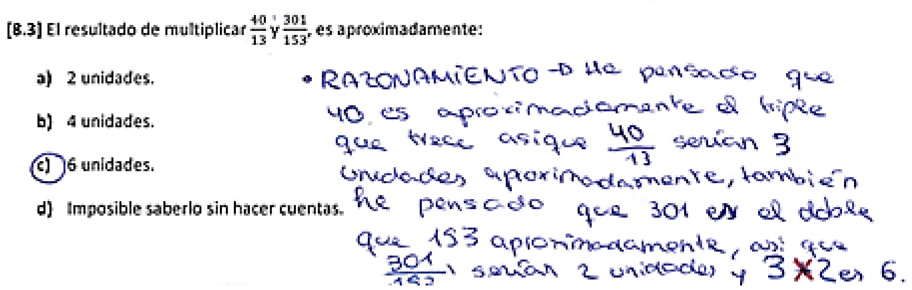
El significado de medida permite desarrollar los contenidos curriculares de secundaria relativos a la fracción (Gairín y Sancho, 2002), considerando resultados de investigación que lo muestran más adecuado que el habitual parte-todo (Escolano, 2007).

La secuencia incorpora como tareas manipulativas situaciones de cálculo, donde los alumnos miden ciertos objetos; y situaciones de construcción, donde los alumnos construyen objetos con una cantidad de magnitud determinada. En estas primeras sesiones aparece la noción de equivalencia de fracciones al medir el mismo objeto de distintas maneras. Y los alumnos proponen, sobre los objetos reales, formas de encontrar “diferentes” fracciones que indiquen la misma cantidad de magnitud. Tras estas actividades se institucionaliza la noción de equivalencia y los métodos de ampliación y reducción para encontrar fracciones equivalentes.

Conviene señalar la importancia de que exista reflexión sobre la manipulación, por lo que los alumnos reflejan gráficamente en su cuaderno todas las acciones realizadas. Se trabaja así la conexión entre las manipulaciones con objetos reales y las representaciones gráficas de estos objetos y manipulaciones. Tras dos sesiones de trabajo manipulativo, se utilizan, casi en exclusiva, las representaciones gráficas que evocan los objetos y manipulaciones han realizado en las primeras sesiones. Sin embargo, conviene que el material siga presente en el aula para atender a la diversidad.

El significado que los alumnos construyen de la fracción como número que indica una medida permite abordar la comparación de forma trivial (¿qué objeto es mayor?), la suma como una agregación de cantidades de magnitud o la resta como una sustracción. No solo se da sentido a lo que significa comparar, sumar o restar fracciones, sino que aparece de forma espontánea la necesidad de unificar la subunidad en la que están expresadas las fracciones (poner común denominador) para responder a los problemas que se les plantean.

La construcción del significado de medida para la fracción y la capacidad de conectar diferentes sistemas de representación favorecen el desarrollo de estrategias propias de resolución de problemas no triviales con poca intervención del profesor y la capacidad de realizar tareas de estimación como la mostrada en la Figura 6.



[8.3] El resultado de multiplicar $\frac{40}{13}$ y $\frac{301}{153}$, es aproximadamente:

a) 2 unidades.

b) 4 unidades.

c) 6 unidades.

d) Imposible saberlo sin hacer cuentas.

• RAZONAMIENTO → He pensado que 40 es aproximadamente el triple que trece asique $\frac{40}{13}$ serían 3 unidades aproximadamente, también he pensado que 301 es el doble que 153 aproximadamente, así que $\frac{301}{153}$ serían 2 unidades y 3×2 es 6.

Figura 6. Multiplicación de fracciones, tarea de estimación.

Proporcionalidad

De nuevo, todo comienza con una situación inocente:

> Suponed que vamos al supermercado y compramos 30 cosas. En total nos han cobrado 15 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

A partir de esta pregunta, los alumnos discuten en sus grupos la posible respuesta. Al poco tiempo se ven las primeras manos levantadas. Los estudiantes comienzan a plantear sus dudas: «Esta pregunta tiene trampa», «Es que, depende de lo que compres», «¿Todas las cosas que compras son iguales?», «¿Todas las cosas tienen el mismo precio?».

La aparición de estas preguntas es un síntoma de que la actividad funciona. Precisamente, está planteada como situación introductoria al concepto de razón como tanto por uno y se pretende hacer reflexionar a los alumnos sobre las condiciones que debemos pedir a una situación en la que hay dos magnitudes relacionadas para que tenga sentido calcular la razón entre ellas ("repartir una entre otra") e interpretar dicha razón como la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con cada unidad de la otra. De hecho, la actividad será exitosa si las respuestas de los grupos permiten establecer en la puesta en común las tres condiciones siguientes que permitirán introducir la noción de magnitudes directamente proporcionales:

- Debemos disponer de dos magnitudes.
- Las magnitudes deben estar relacionadas (covariación).
- A cada unidad de una de las magnitudes le debe corresponder siempre la misma cantidad de la otra (constancia).

A la última condición la denominamos «condición de regularidad» (Gairín y Escolano, 2009). Las intervenciones de los alumnos que hemos descrito se encaminan precisamente en esta dirección y algunos grupos las plasman por escrito en sus respuestas (Figura 7).

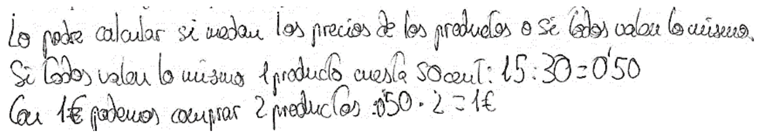


Figura 7. Condición de regularidad expresada por un grupo de alumnos.

Tras responder a la primera pregunta, los grupos se enfrentan a otras como:

> ¿Cuántas cosas podrás comprar por cada euro que lleves al supermercado? Si los 30 € te los has gastado el día 15, ¿cuánto te habrías gastado el día 1?

Así, en el debate, se hablará de que, si se puede calcular la razón entre las magnitudes A y B, también se puede calcular la razón entre B y A, aunque tienen significados diferentes. Y de que no tiene sentido calcular razones entre magnitudes no relacionadas o si se usan números que no están expresando una cantidad.

Es importante que la situación haga emerger las ideas planificadas, pero igual de importante es dar cabida en la puesta en común a las respuestas erróneas. De hecho, el docente durante la fase de actividad de los alumnos debe detectar las respuestas incorrectas y los diferentes grados de profundidad en las respuestas correctas para organizar la puesta en común posterior. Por ejemplo, la respuesta incorrecta que vemos en la Figura 8, puede utilizarse para profundizar en la interpretación de las razones y en los "impedimentos físicos" que puede suponer el uso de magnitudes discretas.

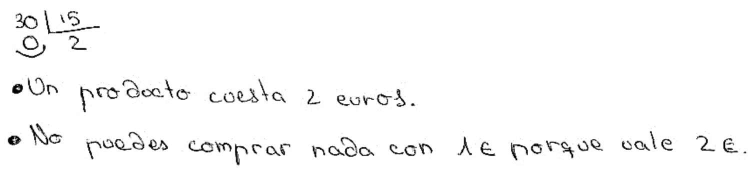


Figura 8. Respuesta incorrecta a la actividad introductoria del concepto de razón.

Aunque algunas de las actividades mostradas pudieran identificarse con situaciones motivadoras para usar al principio de una unidad, el enfoque a través de la resolución de problemas, tal y como lo entendemos, implica utilizar estas situaciones introductorias para cada contenido (conceptual o procedimental) que quiera enseñarse. Podría el lector plantearse, por ejemplo, cómo abordar la enseñanza de contenidos más complejos relacionados con la proporcionalidad. La respuesta sigue siendo la misma, se mantiene el enfoque a través de la resolución de problemas.

Por ejemplo, proponemos como ejercicio a los lectores reflexionar sobre qué tipo de actividad sería adecuada para introducir los repartos inversamente proporcionales a estudiantes de 2º de ESO sin experiencia en este tipo de problemas. Se trata de encontrar un problema que haga emerger ideas que sirvan para encaminarse hacia procedimientos de resolución generales. No vale, por tanto, que el problema contenga una frase similar a "reparte de forma inversamente proporcional a". Y si los lectores quieren conocer nuestra opinión en este tema les invitamos a leer el trabajo de Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2019).

Geometría de emergencia

En el momento de escribir este artículo, el curso 2019/20 tocaba a su fin. Debido a la pandemia producida por la COVID-19, los autores, al igual que miles de docentes, nos vimos obligados a plantear alternativas a distancia de la noche a la mañana. Nuestra preocupación principal era la de mantenernos coherentes con el enfoque seguido en presencial. Es decir, el alumnado, con el andamiaje adecuado, debería seguir teniendo la responsabilidad inicial de enfrentarse a las tareas, habría que hacer puestas en común y progresar de esta manera en el aprendizaje. Al mismo tiempo, éramos plenamente conscientes de las obvias limitaciones que surgían en cuanto a interacción, así como que debíamos ser sensibles con el alumnado con pocos recursos y considerar los elementos fundamentales de una enseñanza a distancia, aunque lo nuestro fuera una enseñanza de emergencia: limitar actividades síncronas y plazos de entrega amplios.

Para ello, en el CPI Val de la Atalaya se reservaron los jueves como día para una videoconferencia de 30-40 minutos, que quedaba grabada para los que no podían asistir. En dichas videoconferencias, que jugaban el papel de las puestas en común, los profesores comentábamos las tareas que se habían mandado para la semana, a partir de las producciones enviadas por los alumnos.

Los profesores controlábamos, en los días previos a cada videoconferencia, que las entregas del alumnado estuviesen completas, sin dejar nada en blanco o con simples "es que no lo entiendo". Distinguíamos entre dudas legítimas e ilegítimas, de manera que solo contestábamos a aquellas que denotaban que lo habían leído e intentado hacer. Cuando se trataba de dudas ilegítimas, la tarea se devolvía al alumno. Al mismo tiempo, recogíamos aquellas producciones más representativas, y una selección de las observaciones de los alumnos, para preparar la videoconferencia. Mediante estas acciones cubríamos el papel del profesor durante la fase de acción que en modo presencial suponían las actuaciones con los grupos de alumnos.

En la puesta en común, se animaba a participar a los alumnos, quienes podían tomar la palabra en el chat o con el micrófono y siempre hacían alguna observación. Igualmente, en esas videoconferencias se compartían los resultados de las autoevaluaciones que completaban los alumnos, donde se les preguntaba cómo se habían ido resolviendo las tareas, qué dificultades habían tenido y qué habían aprendido. Normalmente, después de una videoconferencia se pedía reentrega final de la tarea que había protagonizado la sesión, completando lo ya realizado con nuevos razonamientos. Tras esta reentrega se daba paso a una nueva serie de actividades.

En una de esas secuencias se trabajaron las definiciones de los cuadriláteros. Se dividió el trabajo en dos partes. En primer lugar, el alumnado tenía que escribir la definición de cuadrado, rectángulo y rombo, con sus propias palabras. Una vez escrita, se le indicaba que no debía borrarla y que hiciese la construcción correspondiente en GeoGebra. Para ello se le proporcionaba un ejemplo en vídeo sobre una manera de hacer el cuadrado. Posteriormente, tenían que redactar otra vez la definición, teniendo en cuenta la construcción realizada. La entrega consistía en un documento con las definiciones y, por simplificar, una captura de la construcción. La captura estática de lo hecho en GeoGebra no es lo ideal, pero servía para identificar puntos libres y puntos ligados y se mostró suficiente para las puestas en común. En la Figura 8 se observa la reentrega de un alumno, donde incorpora las propiedades de las diagonales de un cuadrado a su definición, apoyándose en una nueva construcción.

¿Cambia tu definición respecto a lo que has puesto antes?

Sí, sí que cambia porque me permite observar que sus diagonales son iguales y perpendiculares

Haz una captura de pantalla de tu geogebra -con lo que hayas hecho y pégala aquí:

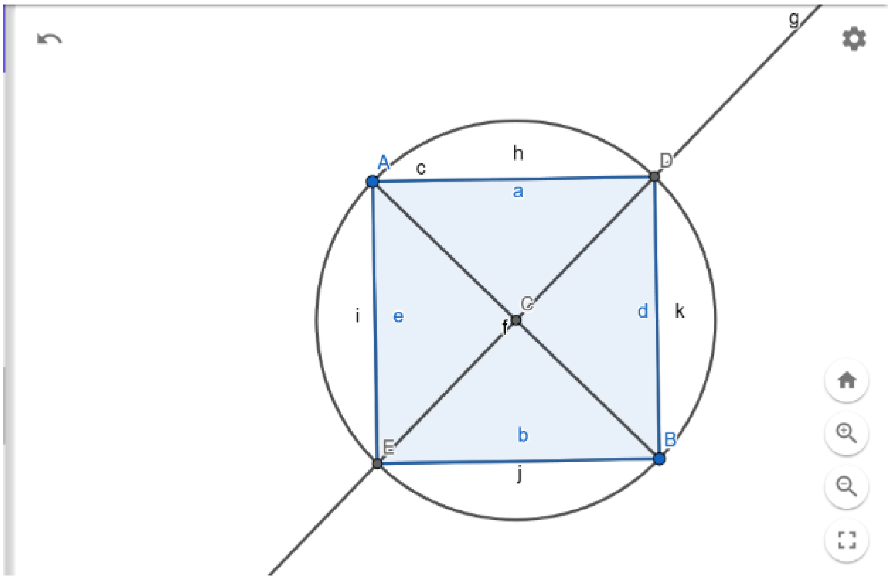


Figura 9. Fragmento de la reentrega final de un alumno sobre la definición de cuadrado.

Conclusiones

En este artículo hemos querido dar unas pinceladas de lo que significa para nosotros la enseñanza a través de la resolución de problemas, cuya idea principal es que los contenidos surjan de la propia actividad de los alumnos.

Pensamos que un gran obstáculo para conseguir este objetivo es el libro de texto. No solo por los diversos estudios que subrayan sus carencias (Ahl, 2016; Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberría, y Sarasua, 2013; Shield y Dole, 2013), sino por la pauta que marcan. La mayoría de los libros de texto ofrecen un único camino, donde primero se ve la “teoría”, con sus ejemplos, después se trabajan unos ejercicios y, finalmente, con suerte, algunos problemas. De hecho, los libros de texto marcan tanto este camino que se erigen en el currículo de facto.

Desde aquí, aprovechamos para reivindicar un desarrollo profesional acorde con el papel que hemos de desempeñar los profesores. En lugar de libros de texto y métodos milagro deberíamos hablar de propuestas didácticas que ofrezcan al docente una justificación sobre el porqué de cada tarea y le permitan flexibilizar y adaptar la secuencia a cada grupo de alumnos. En este sentido nos alineamos claramente con Ferrando, Segura y Pla-Castells (2017) cuando citan a Lampert y otros (2013) para decir:

> Ningún producto acabado y con libro de instrucciones puede suplantar un programa riguroso que preste atención tanto a los conocimientos necesarios para enseñar como a las tareas y actividades que se llevan a cabo como parte del trabajo docente.

No queremos terminar sin mencionar la atención a la diversidad. Si nos tomamos en serio la O de la ESO y la normativa sobre inclusión, atender a la diversidad no significa dar unas fichas con operaciones *sencillitas* a ese alumnado que no puede seguir las matemáticas *elevadas* que están viendo el resto de sus compañeros. Y viceversa, dar unas fichas con matemáticas *elevadas* a algunos alumnos mientras los demás están con algo diferente, tampoco es atenderlos. No, al menos, de manera inclusiva.

Con el enfoque a través de la resolución de problemas se asume esa diversidad continuamente. Para comprender cómo se atiende esta diversidad es necesario tener en cuenta que, después de cada unidad, no todos los alumnos van a aprender lo mismo. Hagas lo que hagas como profesor. No nos referimos a que hay alumnos que suspenden y otros que sacan notable o sobresaliente, sino a que cada alumno crea sus propios significados personales sobre el contenido matemático.

Las secuencias didácticas, por tanto, deben facilitar el desarrollo de estos significados. Por eso, las actividades que hemos descrito tienen un suelo bajo y un techo alto (*low floor - high ceiling*). Es decir, tienen un punto de entrada asequible para todos, sin planos de abstracción formal innecesarios que impidan el acceso a las ideas matemáticas que hay detrás. Y permiten progresar y profundizar, enriqueciendo esos significados personales y facilitando el máximo desarrollo personal de cada alumno.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo). Queremos dedicarlo a nuestros alumnos y compañeros, tanto de instituto, especialmente a Aurora Domenech y Ana Martínez; como del Área de Didáctica de las Matemáticas (Unizar).

Referencias

AHL, L. M. (2016), «Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish mathematics textbooks», *Journal of Research in Mathematics Education - REDIMAT*, nº 5 (2), 180-204.

BORRELL, F., POL, A. y SAGUER, E. (1998), «Estadística y probabilidad», en C. Azcárate y J. Deulofeu (1998), *Matemáticas ESO, Guías Praxis para el profesorado*, Praxis Barcelona.

BINGOLBALI, F. y BINGOLBALI, E. (2019), «One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving», *Mathematics Education Research Journal*, nº 31, 237-257.

CAI, J. (2003), «What research tells us about teaching mathematics through problem solving», *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*, 241-254.

ENGLISH, L. D. y GAINSBURG, J. (2015), «Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum», en L. D. English y D. Kirshner (eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition*, Routledge, Nueva York, 313-335.

ESCOLANO, R. (2007), *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

FERRANDO, I., SEGURA, C. y PLA-CASTELLS, M. (2017), «Nuevas metodologías para la enseñanza de las matemáticas: análisis crítico», *I Jornadas CTEM de la Comunitat Valenciana*.

GAIRÍN, J. M. y ESCOLANO, R. (2009), «Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional», *Suma*, n.º 62, 35-48.

GAIRÍN, J. M. y SANCHO, J. (2002), *Números y algoritmos*, Síntesis, Madrid.

GAULIN, C. (2001), «Tendencias actuales de la resolución de problemas», *Sigma*, nº 19, 51-63.

HMELO-SILVER, C. E., DUNCAN, R. G. y CHINN, C. A. (2007), «Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: a response to Kirschner, Sweller, and Clark», *Educational psychologist*, nº 42 (2), 99-107.

LAMPERT, M., FRANKE, M. L., KAZEMI, E., GHOUSSEINI, H., TURROU, A. C., BEASLEY, H., ... y CROWE, K. (2013), «Keeping it complex: Using rehearsals to support novice teacher learning of ambitious teaching», *Journal of teacher education*, nº 64 (3), 226-243.

LOPES, J. B. y COSTA, N. (1996), «Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativa», *Enseñanza de las ciencias*, nº 14 (1), 45-61.

MARTÍNEZ-JUSTE, S., MUÑOZ-ESCOLANO, J. M. y OLLER-MARCÉN, A. M. (2019), «Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción», en J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, SEIEM, Valladolid, 413-422.

PIERCE, R. y CHICK, H. (2011), «Teachers' Beliefs About Statistics Education», en C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (eds), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, Springer, Dordrecht.

RUIZ DE GAUNA, J., DÁVILA, P., ETXEBERRÍA, J. y SARASUA, J. (2013), «Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970-2005», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, nº 16 (2), 245-276.

SHIELD, M. y DOLE, S. (2013), «Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning», *Educational Studies in Mathematics*, nº 82 (2), 183-199.

SWAN, M. (1985), *The language of functions and graphs*. Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham.

WRIGHT, P. (2017), «Critical relationships between teachers and learners of school mathematics». *Pedagogy, Culture & Society*, nº 25 (4), 515-530.