

Imagen: ThisisEngineering RAEng

# Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática

Universidad de la Rioja

Logroño (España)

19 y 20 de noviembre de 2020

Ángel Gutiérrez, María José Beltrán-Meneu,  
Juan Miguel Ribera, Rafael Ramírez-Uclés,  
Adela Jaime, Eva Arbona, Camilo Sua, Lucía Rotger,  
Clara Jiménez-Gestal, Ángel Alberto Magreñán  
y Alba María Damián



**UNIVERSIDAD  
DE LA RIOJA**



# **Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática**

Universidad de la Rioja

Logroño (España), 19 y 20 de noviembre de 2020

Sede virtual: [bit.ly/JornadasACM](https://bit.ly/JornadasACM)

Editores:

Ángel Gutiérrez, María José Beltrán-Meneu, Juan Miguel Ribera, Rafael Ramírez-Uclés, Adela Jaime, Eva Arbona, Camilo Sua, Lucía Rotger, Clara Jiménez-Gestal, Ángel Alberto Magreñán, Alba María Damián.

# JORNADAS INTERNACIONALES DE INVESTIGACIÓN Y PRÁCTICA DOCENTE EN ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

Universidad de la Rioja (Logroño, España)

Sede virtual: [bit.ly/JornadasACM](http://bit.ly/JornadasACM)

## ***Editores***

Ángel Gutiérrez, María José Beltrán-Meneu, Juan Miguel Ribera, Rafael Ramírez-Uclés, Adela Jaime, Eva Arbona, Camilo Sua, Lucía Rotger, Clara Jiménez-Gestal, Ángel Alberto Magreñán, Alba María Damián

## ***Comité Científico***

César Augusto Acosta Minoli. Universidad del Quindío (Colombia)

Ángel Alsina Pastells. Universitat de Girona (España)

Jorge Hernán Aristizábal Zapata. Universidad del Quindío (Colombia)

Javier Barquero Rodríguez. Asesor de matemáticas del M.E.P. (Costa Rica)

María José Beltrán Meneu. Universitat Jaume I (España)

Pablo Beltrán Pellicer. Universidad de Zaragoza (España)

Cristianne María Butto Zarzar. Universidad Pedagógica Nacional (México)

Matías Camacho Machín. Universidad de La Laguna (España)

Susana Paula Graça Carreira. Universidade do Algarve (Portugal)

Carolina Carrillo García. Universidad Autónoma de Zacatecas (México)

Enrique de la Torre Fernández. Universidade da Coruña (España)

Pablo Flores Martínez. Universidad de Granada (España)

Charlie Gilderdale. NRIC - University of Cambridge (Gran Bretaña)

Efraín Alberto Hoyos Salcedo. Universidad del Quindío (Colombia)

Hélia Jacinto. Universidade de Lisboa (Portugal)

Antonio Ledesma López. IES Número 1 de Requena (España)

Mónica Andrea Mora Badilla. Universidad de Costa Rica (Costa Rica)

María Rosa Nortes Martínez-Artero. Universidad de Murcia (España)

Rafael Ramírez Uclés. Universidad de Granada (España)

Pamela Reyes Santander. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

Juan Miguel Ribera Puchades. Universidad de La Rioja (España)

### **Comité Organizador**

Juan Miguel Ribera Puchades (Coordinador). Universidad de La Rioja

Rafael Ramírez Uclés. Universidad de Granada

Adela Jaime Pastor. Universitat de València

Ángel Gutiérrez Rodríguez. Universitat de València

María José Beltrán Meneu. Universitat Jaume I

Clara Jiménez Gestal. Universidad de La Rioja

Ángel Alberto Magreñán Ruiz. Universidad de La Rioja

Lucía Rotger García. Universidad de La Rioja

José Alberto Conejero Casares. Universitat Politècnica de València

Eva Arbona Picot. Universitat de València

Jeison Camilo Sua Flórez. Universitat de València

Alba María Damián Gómez. Universidad de Granada

*Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*

*International Meeting of Research and Teaching Practice on Mathematical Giftedness*

© 2021 de los textos: los autores

© 2021 de la edición: Universidad de la Rioja

ISBN: 978-84-09-25785-0

### **Citar como**

Gutiérrez, A., Beltrán-Meneu, M. J., Ribera, J. M., Ramírez-Uclés, R., Jaime, A., Arbona, E., Sua, C., Rotger, L., Jiménez-Gestal, C., Magreñán, A. A. y Damián, A. M. (eds.) (2021). *Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*. Logroño, España: Universidad de la Rioja.

Las comunicaciones y talleres presentados en el congreso y publicados en estas actas han sido sometidos a evaluación doble ciega por pares y selección por parte de miembros del Comité Científico.

## Entidades colaboradoras



**UNIVERSIDAD  
DE LA RIOJA**

*Universidad de La Rioja*



*Depto. de Didáctica de la Matemática  
Universitat de València*

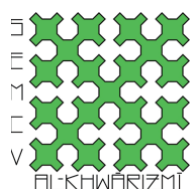


**UNIVERSIDAD  
DE GRANADA**

*Depto. de Didáctica de la Matemática  
Universidad de Granada*



*Depto. de Matemática Aplicada  
Universitat Politècnica de València*



*Societat d'Educació Matemàtica de la  
Comunitat Valenciana "al-Khwarizmi"*



*EDU2017-84377-R (Miciu/Feder)*

# ÍNDICE

<i>Presentación</i> .....	1
<i>Estudiantes con talento matemático opinan</i> A. Jaime, D. Contreras, M. Mora .....	3
<b>CONFERENCIAS PLENARIAS</b>	
<i>Respuesta desde la investigación en didáctica a la atención de la alta capacidad matemática</i> P. Flores Martínez .....	9
<i>La adicción a las matemáticas no perjudica la salud</i> C. Gilderdale .....	17
<b>COMUNICACIONES</b>	
<i>Características diferenciadoras de estudiantes con alta capacidad matemática en la resolución de problemas de patrones geométricos</i> E. Arbona, Á. Gutiérrez, M.J. Beltrán-Meneu .....	29
<i>Enriqueciendo actividades para talentos matemáticos</i> D. Ariza-Ruiz, P. Gutiérrez-Jaime .....	37
<i>Características de talento matemático en las respuestas de un niño de 9 años a una cuestión de geometría</i> M. Bernabeu, Á. Buforn .....	45
<i>El contexto de olimpiadas de matemáticas como recurso formativo docente para atender estudiantes con altas capacidades</i> C. Carrillo, J.I. López-Flores, R. Mier .....	53
<i>Una cúpula geodésica convertida en planetario: una experiencia extracurricular para alumnado de alta capacidad en educación secundaria</i> I. Conejo Pérez, C. Valero Gutiérrez .....	61
<i>Programa JOMAT ULS, jornadas matemáticas preuniversitarias y vocacionales de la Universidad de La Serena</i> D. Contreras .....	69
<i>Estructuras en funciones con variables continuas en estudiantes de educación primaria en un programa de enriquecimiento curricular</i> A. Damián, M.C. Cañadas, R. Ramírez .....	75
<i>La motivación de los alumnos excelentes hacia las matemáticas</i> F.S. Domingues Carlos, M.T. González-Astudillo .....	83
<i>Alta capacidad matemática en primaria. Análisis bibliométrico de publicaciones en español</i> P. Gutiérrez-Jaime, F. Arteaga, A.M. Casino-García .....	91
<i>Reto y aprendizaje para alta capacidad matemática en la competición DIVMATSE</i> M. Mora, J.H. Aristizábal, J. Barquero, A. Jaime .....	99
<i>Habilidades de visualización en niños de Primaria con alta capacidad matemática</i> M. Mora, Á. Gutiérrez .....	107
<i>Una experiencia de atención a las altas capacidades en matemáticas: semillero de matemáticas</i> L. Mora, Z. Monroy, L. Peraza, Z. Zapata .....	115

<i>El proyecto ESTALMAT. Más de 20 años estimulando el talento matemático</i> R. Ramírez, M. Sánchez .....	123
<i>Creatividad en alumnos de talento matemático: un estudio exploratorio</i> O. Roldán, I. Ferrando .....	129
<i>Un curso online de olimpiadas matemáticas para la atención al estudiantado con alta capacidad matemática</i> L. Rotger, J.M. Ribera .....	137
<i>Análisis de los problemas de probabilidad en las olimpiadas matemáticas</i> J.M. Rubio-Chueca, J.M. Muñoz-Escolano, P. Beltrán-Pellicer .....	143
<i>Análisis de pruebas de selección de estudiantes de talento matemático y caracterización del perfil de los participantes</i> R. Sancho, I. Ferrando .....	151
<i>Enriquecimiento extracurricular para talento matemático con ayuda de recursos manipulativos</i> C. Sua, A. Jaime .....	159
<i>Competiciones matemáticas</i> I. Torres-Moliner, M.P. Berzosa-Tejero .....	167
<i>Olimpiada Recreativa de Matemática 2019: Un diagnóstico inicial de la educación primaria de Venezuela</i> I. Urdaneta, L. Niño, J. Trabucco, L. Calatayud .....	175
<b>TALLERES</b>	
<i>El trabajo con estudiantes de alta capacidad en matemáticas como motor del aula en general</i> A. Ledesma López .....	185
<i>Un ambiente de geometría dinámica 3d para el aprendizaje de la demostración por estudiantes con altas capacidades matemáticas</i> C. Sua .....	195
<i>Programa CRACMAT: Centro de Razonamiento Alta Capacidad Matemática</i> I. Torres-Moliner, M.J. López .....	203



# ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD EN LAS OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

## Analysis of probability problems in Mathematical Olympiads

Rubio-Chueca, J.M., Muñoz-Escolano, J.M., Beltrán-Pellicer, P.

Universidad de Zaragoza (España)

### Resumen

*En este trabajo se analiza la demanda cognitiva, lenguajes y procedimientos de las tareas matemáticas propuestas en los problemas sobre probabilidad en las pruebas individuales de la semifinal y final en la Olimpiada Matemática Aragonesa (1989-2019) y los problemas llevados a cabo en la prueba individual de la Olimpiada Matemática Nacional (1990-2019). Los resultados muestran que todas las tareas propuestas en las olimpiadas son de nivel alto según el modelo de demanda cognitiva, lo cual es adecuado como propuesta para estudiantes de alta capacidad matemática, con inclusión de tareas del nivel superior según ese mismo modelo, cuya resolución podría convertirse en un indicador de alta capacidad matemática, si bien no se ha realizado este análisis en nuestro estudio. Por otro lado, evidencian la necesidad de proponer más problemas en estos concursos promoviendo el aprendizaje de la probabilidad en la Educación Secundaria.*

**Palabras clave:** *olimpiada matemática, tarea matemática, demanda cognitiva, enfoque onto-semiótico, aprendizaje de la probabilidad*

### Abstract

*This paper analyses the cognitive demand of mathematical, languages and procedures tasks proposed in the problems on probability in the individual tests of both the semi-final and the final in the Aragonese Mathematical Olympiad (1989-2019) and the problems carried out in the individual test of the National Mathematical Olympiad (1990-2019). The results show that all the tasks proposed in the Olympics are of a high level according to the cognitive demand model, which is suitable as a proposal for students of high mathematical ability, including tasks of the higher level according to the same model, whose resolution could become an indicator of high mathematical ability, although this analysis was not carried out in our study. On the other hand, they show the need to propose more problems in these competitions promoting the learning of probability in Secondary Education*

**Keywords:** *mathematical olympiad, mathematical tasks, cognitive demand, onto-semiotic approach, probability learning*

### INTRODUCCIÓN

Jaime y Gutiérrez (2014) señalan cuatro tipos de acciones de apoyo extraescolar a los estudiantes con alta capacidad matemática que se realizan en la actualidad: acciones de tipo curricular, de tipo lúdico, de actividades mixtas y de resolución de problemas. Dentro de esta última categoría se ubican las competiciones matemáticas (Ortega, Berciano, y Pecharromán, 2018), donde las

Olimpiadas matemáticas, organizadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, son un claro y exitoso ejemplo en España.

Este hecho no es solo propio del contexto español, puesto que las competiciones matemáticas son una actividad usualmente realizada por estudiantes con alta capacidad matemática de gran número de países. En un estudio con entrevistas con más de 230 estudiantes con altas capacidades, Olszewski-Kubilius y Lee (2004) señalan que estos concursos son una actividad extraescolar que caracteriza a los estudiantes de altas capacidades matemáticas, por encima de otras, tanto en áreas científicas como humanísticas.

Además, Jaime y Gutiérrez (2017, p. 83) apuntan que “los estudiantes con alta capacidad matemática se sienten con frecuencia solos en el contexto de sus clases ordinarias, porque ninguno de sus compañeros tiene su capacidad matemática ni su interés por resolver problemas difíciles”. De esta manera, valoran positivamente el papel de las olimpiadas matemáticas, ya que la participación en estos concursos permite a los estudiantes dotados y talentosos obtener una imagen más realista de sus habilidades (Subotnik, Miserandino, y Olszewski-Kubilius, 1996).

Por otro lado, otro aspecto valioso de las olimpiadas es servir de banco de tareas y problemas como material complementario para alumnos de altas capacidades matemáticas (Toh, 2013).

Las olimpiadas u otros concursos matemáticos plantean diversas líneas de investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas, si bien nuestra búsqueda bibliográfica arroja pocas referencias en este sentido. Algunos trabajos se centran en los estudiantes y analizan cómo se comportan cuando resuelven algunas de las tareas de estos concursos (Gairín y Escolano, 2009; Guinjoan, Gutiérrez, y Fortuny, 2015), otros trabajos se centran en el profesor y tratan de comprender el conocimiento que ponen en juego los evaluadores de olimpiadas matemáticas al analizar errores cometidos por estudiantes (Huitrado y Climent, 2014), mientras que otros estudian los recursos tecnológicos necesarios para la creación y diseño de materiales online para la formación y preparación de estudiantes (Rotger y Ribera, 2019).

En su amplia revisión bibliográfica, Jaime y Gutiérrez (2017) señalan distintas investigaciones nacionales e internacionales sobre análisis de enunciados de tareas (no necesariamente de olimpiada). En una de ellas, Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) emplean el constructo de demanda cognitiva de una tarea (Smith y Stein, 1998) para analizar teóricamente problemas de patrones geométricos con estudiantes de alta capacidad. Este modelo es refinado y adaptado por los autores cuando es contrastado con resoluciones reales a problemas de patrones geométricos de estudiantes de alta capacidad.

Por otro lado, numerosos estudios e investigaciones consideran de suma importancia el estudio de la probabilidad. No solo son los profesionales e investigadores los que deben tener ciertos conocimientos de probabilidad, sino cualquier persona, en su día a día, para tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relaciones entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002). En este sentido, la conexión de la probabilidad con la vida cotidiana es mucho más directa que el resto de los bloques de contenido de las matemáticas escolares. Inspirados por la noción de alfabetización matemática (mathematical literacy), que surge en el contexto de los estudios PISA de la OCDE, diversos autores como Jones (2005) o Batanero (2006, 2014), señalan la necesidad de que toda la ciudadanía alcance un alto grado de alfabetización probabilística.

Así mismo, es destacable el creciente interés que recibe la enseñanza de la probabilidad y estadística debido a la necesidad mostradas por la UNESCO y otras instituciones, como el Instituto Internacional de Estadística (ISI), de ofrecer una formación estadística y probabilística a los estudiantes con la finalidad de que sea competente en una sociedad dominada por la

información (Engel, 2019). Tal demanda ha impulsado la enseñanza de la probabilidad incluyéndola en los currículos de secundaria y primaria (CCSSO, 2010; MEC, 2007; NCTM, 2000).

Esto responde a la necesidad de contar con ciudadanos alfabetizados estocásticamente. Siguiendo el modelo de alfabetización probabilística propuesto por Gal (2005) se trata de ofrecer a los alumnos herramientas para contestar a preguntas cuyas respuestas no son inmediatas, a la vez que les faciliten tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. Desde esta perspectiva, y de acuerdo con Batanero et al. (2016), se requiere prestar especial atención a los problemas prácticos y pedagógicos vinculados a la incorporación y tratamiento de la estocástica.

Producto de lo anterior surge este estudio, cuya finalidad es investigar los problemas matemáticos presentes en la Olimpiada Matemática Autonómica de Aragón y Nacional con el propósito de observar la representatividad de los contenidos de probabilidad en estas competiciones, y abrir la puerta a realizar acciones para reconocer y promover el aprendizaje de la probabilidad (y la estadística) en la Educación Secundaria.

Para realizar este estudio se va a analizar los problemas que abordan contenidos de probabilidad desde dos puntos de vista: tipos de tareas implicadas en cuanto a la demanda cognitiva y objetos matemáticos asociados desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

## **MARCO TEÓRICO**

### **Tipos de tareas matemáticas**

Un posible criterio de categorización de los problemas es a partir de la demanda cognitiva que la tarea implica para el sujeto que las enfrenta y desarrolla. De acuerdo con Stein, Grover y Henningsen (1996) la demanda cognitiva de una tarea puede variar según sus características propias y según cómo estas sean presentadas o realizadas. Desde esta perspectiva proponen una categorización para las tareas matemáticas de acuerdo con el tipo de pensamiento que se requiere para solucionarlas, caracterizando a las tareas matemáticas en niveles de exigencia o demanda cognitiva: memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión y construir matemática (Smith y Stein, 1998). En ocasiones, se consideran dos grandes niveles, correspondiendo los niveles 1 y 2 a una baja demanda cognitiva, y 3 y 4 a una alta demanda cognitiva.

### **Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática**

El EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero, y Font, 2007, 2019) concede herramientas para el análisis de la enseñanza, de los recursos involucrados en ella y del aprendizaje llevado a cabo por los alumnos. Este enfoque centra su interés en las prácticas matemáticas (Godino y Batanero, 1998) cobrando gran relevancia la noción de situación problema (tarea, problema, etc.) y los objetos matemáticos intervinientes que emergen en tales prácticas. Desde esta perspectiva, Godino, Batanero y Font (2007, 2019), proponen tipos de objetos matemáticos, entendidos como “cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización”. Tales objetos matemáticos se pueden clasificar en: situación-problema, lenguaje, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.

## **METODOLOGÍA**

En el estudio para la demanda cognitiva y análisis de los objetos matemáticos ligados a la probabilidad se utiliza como método el análisis de contenido (Krippendorff, 2013) realizando un estudio de tipo exploratorio-descriptivo. Para el análisis de contenido se adopta la metodología propuesta por Cobo (2003) adaptada: identificar y seleccionar las partes de los problemas de las

olimpiadas que presenten tareas matemáticas relacionadas con probabilidad; establecer las unidades de análisis (UA) y categorías a considerar para codificar la información (indicadores para el análisis de la demanda cognitiva, el lenguaje y los procedimientos); selección de ejemplos específicos de tareas y objetos según las UA y categoría; registrar los datos en una hoja de cálculo permitiendo realizar un análisis descriptivo.

### Muestra y unidades de análisis

La muestra fue intencional y las UA se corresponden con los problemas de probabilidad llevados a cabo en las pruebas individuales de la semifinal y final en la Olimpiada Matemática Aragonesa desde 1989 (I Olimpiada Aragonesa) al 2019 (XXVIII Olimpiada Aragonesa) y los problemas planteados en las prueba individual de la Olimpiada Matemática Nacional desde 1990 (I Olimpiada Nacional) al 2019 (XXX Olimpiada Nacional) en los que se abordan contenidos de probabilidad.

### Categorías de análisis

De acuerdo con la *demanda cognitiva*, las tareas matemáticas vinculadas al estudio de la probabilidad fueron clasificadas de acuerdo con la disposición y taxonomía. Para ello se definió un conjunto de indicadores que fueron utilizados en el proceso de codificación (Tabla 1).

**Tabla 1.** Indicadores utilizados en el proceso de codificación de la demanda cognitiva.

Tipo de tarea	Indicadores
Memorización	<p>I1: Foco en la reproducción memorística de aprendizajes previos asociados a la probabilidad.</p> <p>I2: Son tareas sobre probabilidad con un propósito claramente establecido, sin ambigüedades.</p> <p>I3: Uso de reproducción exacta de material visto previamente para el estudio de la probabilidad en su nivel curricular correspondiente, y lo que se reproduce se establece clara y directamente.</p>
Procedimientos sin conexiones	<p>I1: Usan procedimientos, relacionados con la la probabilidad, están específicamente intencionados, o bien son evidentes según el nivel curricular y el planteamiento del problema.</p> <p>I2: Existe poca ambigüedad sobre qué se hace y cómo se hace.</p> <p>I3: No tienen conexión con conceptos o significados subyacentes de los procedimientos vinculados a la probabilidad que se usan</p> <p>I4: Están enfocadas en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar una comprensión de nociones asociadas a la probabilidad.</p> <p>I5: No requiere explicaciones o éstas solo se enfocan en describir el procedimiento utilizado.</p>
Procedimientos con conexiones	<p>I1: Se focalizan en el uso de procedimientos con el propósito de desarrollar niveles profundos de comprensión de los conceptos e ideas asociadas a la probabilidad.</p> <p>I2: Sugieren, explícita o implícitamente, caminos a seguir que son procedimientos amplios y generales que tienen conexiones cercanas con el significado o con diferentes representaciones de un concepto vinculadas a la probabilidad.</p> <p>I3: Aunque se puede seguir un procedimiento general, no pueden seguirse sin pensar (requiere de cierto grado de esfuerzo cognitivo). Se necesitan ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos usados para completar la tarea satisfactoriamente desarrollando una comprensión de los conceptos e ideas asociadas a la probabilidad.</p>

Tipo de tarea	Indicadores
Hacer matemáticas	<p>I1: Requiere de un pensamiento complejo y no algorítmico en torno a la probabilidad.</p> <p>I2: El problema no sugiere, de forma explícita, un camino predecible.</p> <p>I3: Requiere que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos y relaciones vinculadas a la probabilidad.</p> <p>I4: Requiere que los estudiantes accedan a conocimientos y experiencias relevantes en torno a la probabilidad y que hagan uso de ellas al resolver el problema.</p> <p>I5: Requiere que se analice la tarea y se examinen las restricciones de la misma pudiendo darse alguna limitación</p> <p>I6: Requiere una alta demanda cognitiva que puede provocar una cierta ansiedad inicial dada la naturaleza impredecible del proceso de resolución requerido.</p>

En cuanto a las *categorías de análisis del lenguaje*, en primer lugar, distinguimos las expresiones verbales, considerando el trabajo de Shuard y Rothery (1984), quienes distinguen las palabras del lenguaje cotidiano que se usan en los problemas con sentido específico para referirse a procedimientos que tengan que ver con la probabilidad. Dentro de las expresiones específicas se ha diferenciado las propias de la probabilidad y las de juegos de azar (Gómez et al., 2013). Además del verbal, se han analizado otros registros:

- El tipo de lenguaje numérico empleado, encontrando expresiones numéricas relacionadas con los números enteros, decimales y fracciones.
- Lenguaje simbólico-conjuntista, que incluye en el análisis las expresiones de igualdad, operaciones aritméticas, desigualdades, aproximación, letras como símbolos y notación funcional, al igual que en el trabajo de Gómez et al. (2013).
- Lenguaje tabular, cuyo principal uso es la presentación de datos y se relaciona explícitamente con la probabilidad. Los tipos de tablas que analizaremos son: listado de datos, tabla de recuento, de frecuencia sin agrupar, con datos agrupados, de doble entrada y frecuencias relativas.
- Lenguaje gráfico-diagramático, donde se tienen en cuenta los diagramas de barra, de sectores y pictogramas puesto que sirven como base para la comprensión de la distribución de probabilidades y el significado frecuencial. Además, también podemos encontrar el diagrama en árbol para representar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio de varias etapas, pudiendo o no establecer una conexión explícita con el cálculo de probabilidades compuestas o condicionadas.

Por otro lado, se han categorizado las tareas de acuerdo con los procedimientos que movilizan. Siguiendo el trabajo de Gómez, Batanero y Contreras (2014) se han tenido en cuenta los procedimientos relacionados con los significados de la probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, axiomático que se pueden consultar en Batanero (2005).

## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez seleccionadas las unidades de análisis se codificaron de acuerdo con los indicadores descritos. Para ello se dicotomizaron asignando puntuaciones a cada indicador según su presencia (1) o ausencia (0) en cada uno de los problemas sobre probabilidad.

### Representatividad de los problemas vinculados a la probabilidad

En la fase semifinal de la olimpiada autonómica de 162 problemas, sólo 2 problemas (1,2%) corresponden a tareas relacionadas con la probabilidad, mientras que, en la final de la olimpiada autonómica de 165 problemas, se identifican un total de 4 (2,4%). De la Tabla 2 se desprende que, en total, en la olimpiada autonómica de 327 problemas analizados en 6 (1,8%) tienen que ver con la probabilidad. De la misma manera, analizando los problemas de la fase nacional, de 164 problemas en 8 (4,8%) se tiene que realizar alguna tarea relacionada con la probabilidad. Por tanto, de un total se analizó 491 problemas, de los cuales 14 (2,8%) corresponden a tareas relacionadas con la probabilidad.

**Tabla 2.** Distribución por Olimpiada de los problemas de probabilidad (elaboración propia).

Olimpiada	Nº Problemas	Nº Problemas Probabilidad
Autonómica (semifinal)	162	2
Autonómica (final)	165	4
Nacional	164	8

### Demanda cognitiva de los problemas de probabilidad propuestos

Se ha observado en el estudio un predominio total de tareas matemáticas de un alto nivel de exigencia cognitiva (100%) en los problemas propuestos en las olimpiadas, destacando aquellas tareas vinculadas al uso de procedimientos con conexión (64,4%). También cabe destacar la presencia de tareas vinculadas al hacer matemáticas en la nacional (57%) frente a la autonómica (0%). En lo que respecta a las tareas que implican un bajo nivel de demanda cognitiva, se observa que, no aparecen en ninguno de los problemas analizados en las olimpiadas. En el caso de la Olimpiada Autonómica, tanto en la fase semifinal como en la final predominan los problemas con procedimientos con conexión (100%). En la Olimpiada Nacional, en la fase final predominan los problemas con procedimientos con conexión (42,6%) y hacer matemáticas (56,8%).

### Lenguaje y procedimientos en los problemas de probabilidad propuestos

Es destacable que, en el apartado de lenguajes, predominan las expresiones verbales específicas de juegos de azar (47,1%), seguido de las cotidianas (30,7%) y específicas de probabilidad (22,2%). Resaltar que no encontramos, pese a la importancia que tiene, el registro tabular y, encontramos en muy pocas ocasiones, el uso del lenguaje gráfico-diagramático destacando los diagramas de árbol. En cuanto a los procedimientos, el 98,3% corresponden a procedimientos relacionados con el significado clásico destacando la regla de Laplace (23,3%) y enumerar casos favorables (23,3%).

### CONCLUSIONES

Se desprende de este trabajo la poca representatividad que ocupan los contenidos de probabilidad en las Olimpiadas Matemáticas. Aunque desde 2013 se vienen celebrando Olimpiadas de Estadística (conocidas desde 2017 como Competición Estadística Europea), pensamos que las Olimpiadas Matemáticas como tales deberían tener una mayor representación de la probabilidad y la estadística, ya que forman parte de los contenidos curriculares de matemáticas. Esto es algo que podría estar relacionado con los sistemas de creencias del profesorado que imparte matemáticas en las diferentes etapas educativas (Estrada, Batanero, y Fortuny, 2004), lo cual abre una línea de investigación.

En cuanto al lenguaje, sorprende que en ningún momento aparezca el registro tabular. Si bien es cierto, aparece de forma implícita en los procedimientos llevados a cabo en la resolución de problemas para facilitar la enumeración de casos favorables.

Para finalizar, en este análisis a priori que hemos realizado, se constata que las tareas que plantean los problemas de olimpiada son de demanda cognitiva alta correspondiendo en su mayoría a lenguajes específicos de juegos de azar y probabilidad con procedimientos relacionados con enumerar casos favorables y cálculo de la regla de Laplace. Si bien es cierto, sólo en las olimpiadas nacionales encontramos tareas de nivel superior, “hacer matemáticas” lo cual nos hace pensar que los estudiantes que resuelvan dichos problemas sí tendrán un perfil de alta capacidad matemática. No obstante, habría que contrastar estos resultados con los sistemas de prácticas puestos en juego en la resolución de los problemas, ya que, como señalan Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015), la realidad puede no corresponderse con este modelo.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60\_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

## REFERENCIAS

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar*. Granada: Thales.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Cham, Suiza: Springer.
- Batanero, C. (2014). Probability teaching and learning. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.
- Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante, España: SEIEM.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de , Granadasecundaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.
- Council of Chief State School Officers (CCSSO). (2010) *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: NGA Center and CCSSO. Recuperado de <http://www.corestandards.org/Math/>
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad: ¿Qué es la estadística cívica? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, 16(1), 89-111.
- Gairín, J. M. y Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma*, 62, 35-48.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, (pp. 39-63). Nueva York, NY: Springer.
- Gigerencer, G. (2002). *Calculated risks: How to know when numbers deceive you*. Nueva York, NY: Simon & Schuster.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 37-42.
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon*, 31(2), 25-42.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- Guinjoan, M., Gutiérrez, Á. y Fortuny, J. M. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 29-46.
- Huitrado, J. L. y Climent, N. (2014). Conocimiento del profesor en la interpretación de errores de los alumnos en álgebra. *PNA*, 8(2), 75-86.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp.71-89). Zaragoza: SEIEM.
- Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Nueva York: Springer.
- Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- Olszewski-Kubilius, P. y Lee, S. (2004). The role of participation in in-school and outside-of-school activities in the talent development of gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education*, 15(3), 107-123.
- Ortega, T., Berciano, A. y Pecharromán, C. (2018). *Complementos de formación matemática*. Madrid: Síntesis.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)*, 5, 677-773.
- Rotger, L. y Ribera, J. M. (2019). Designing a video course. The case of the online course of mathematical olympiads. En L. Uden, D. Liberona, G. Sanchez y S. Rodríguez-González (Eds.), *International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 79-89). Cham, Suiza: Springer.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. Londres: Murray.
- Smith M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344-350.
- Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- Subotnik, R. F., Miserandino, A. D. y Olszewski-Kubilius, P. (1996). Implications of the Olympiad studies for the development of mathematical talent in schools. *International Journal of Educational Research*, 25, 563–573.
- Toh, T. L. (2013). Mathematics Competition Questions and Mathematical Tasks for Instructional Use. En B. Kaur (Ed.) *Nurturing reflective learners in mathematics: yearbook 2013* (pp. 189-207). Singapur: World Scientific, AME.