RECME Editorial Smart Smath Alianza ASOCOLME - Grupo Editorial GAIA Revista Colombiana de Matemática Educativa

# Concordancias y complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el Enfoque Ontosemiótico

Juan D. Godino, Pablo Beltrán-Pellicer & María Burgos
jdgodino@gmail.com; pbeltran@unizar.es; mariaburgos@ugr.es
Universidad de Granada; Universidad de Zaragoza; Universidad de Granada
España

**Resumen**

En este trabajo se aborda el problema de la articulación de dos marcos teóricos usados en la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: la teoría de la objetivación y el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Como primera aproximación al problema, se describen los principios y conceptos básicos de ambas teorías y se identifican algunas concordancias y complementariedades. Para contextualizar la reflexión se usa el informe de una investigación empírica sobre interpretación de un gráfico cartesiano que representa el movimiento relativo, planteada en el marco de la teoría de la objetivación. Aunque ambas teorías comparten principios socioculturales sobre la naturaleza de las matemáticas y los procesos de aprendizaje, este ejemplo permite reconocer el diferente énfasis que ponen ambos enfoques en el análisis de las dimensiones epistemológica, ontológica y semiótico-cognitiva, y las implicaciones de estas diferencias sobre la dimensión instruccional.

*Palabras clave: articulación de teorías, teoría de la objetivación, enfoque ontosemiótico*

# Concordances and complementarities between the Theory of Objectification and the Ontosemitic Approach

**Abstract**

This paper addresses the problem of the articulation of two theoretical frameworks used in research on the teaching and learning of mathematics: the theory of objectification and the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. It is a first approach to the problem in which the basic principles and concepts of both theories are described and some concordances and complementarities are identified. To contextualize the reflection, we use the report of an empirical research on the interpretation of a Cartesian graph that represents relative movement, proposed in the framework of the objectification theory. Although both theories share socio-cultural principles about the nature of mathematics and learning processes, this example allows to recognize the different emphasis that both approaches put on the analysis of the epistemological, ontological and semiotic-cognitive dimensions, as well as their implications on the instructional dimension.

*Keywords: networking theories, objectification theory, onto-semiotic approach*

# Concordâncias e complementaridades entre a Teoria da Objeção e a Enfoque ontossemiótico

**Resumo**

Neste trabalho aborda-se a problemática da articulação de dois referentes teóricos, usados na investigação sobre o ensino e aprendizagem da matemática: a teoria da objetivação e o enfoque ontossemiótico do conhecimento e instrução matemáticos. Trata-se de uma primeira aproximação desta problemática, em que se descrevem os princípios e conceitos básicos de ambas as teorias e se identificam alguns aspetos concordantes e complementares. Para contextualizar a reflexão utiliza-se a descrição de uma investigação empírica, sobre a interpretação de um gráfico cartesiano representativo de um movimento relativo, realizada segundo o referente teórico da teoria da objetivação. Apesar de ambas as teorias compartilharem princípios socioculturais sobre a natureza da matemática e dos processos de aprendizagem, este exemplo permite reconhecer diferentes ênfases que os dois enfoques põem em jogo na análise das dimensões epistemológica, ontológica e semiótico-cognitiva, assim como as implicações sobre a dimensão instrucional.

*Palavras-chave: articulação de teorias, teoria da objetivação, enfoque ontossemiótico.*

## 1 Introducción

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los diversos factores que se deben tener en cuenta y la influencia de los diversos contextos culturales, justifican que se hayan generado diversas teorías para tratar de describir, explicar y diseñar dichos procesos. Esta es la razón por la que la articulación de marcos teóricos (networking theories) está recibiendo una atención particular por diversos autores (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008), quienes consideran que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de las matemáticas puede ser hasta cierto punto inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como campo científico. Prediger, et al. (2008) describen diferentes estrategias y métodos para articular teorías, que van desde ignorar la existencia de otras teorías o no relacionarlas a la unificación global de todas ellas. Algunas estrategias intermedias sugeridas por estos autores serían hacer comprensibles entre sí las teorías, comparar y contrastar diferentes aproximaciones, coordinar y combinar perspectivas, para, finalmente, lograr una integración y síntesis local.

En este trabajo iniciamos el estudio de la articulación entre la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2006; 2014) y el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; 2019). En la Sección 2 presentamos una síntesis de los rasgos característicos de la TO incluyendo la descripción de una investigación que aplica la TO como base para el diseño e interpretación de sus resultados. En la Sección 3 incluimos la descripción de las herramientas del EOS que tienen relación con la TO y las aplicamos para interpretar la investigación empírica mencionada. En la Sección 4 analizamos las concordancias y complementariedades entre las dos teorías, comparando los principios que asumen para abordar los problemas epistemológico, ontológico, semiótico-cognitivo, educativo-instruccional y ecológico implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Finalmente incluimos una síntesis, describimos limitaciones del trabajo y algunas cuestiones abiertas.

## 2 Teoría cultural de la objetivación

Radford (2006; 2008; 2014) ha desarrollado una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se inspira en las escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje.

### 2.1 *Principios y conceptos básicos de la TO*

Se asume una manera específica de considerar la educación en general, y la enseñanza y aprendizaje en particular, que tiene en cuenta, no solo los conocimientos en juego sino también la formación de los alumnos en tanto que sujetos humanos. Esta posición político-conceptual, conocida como *teoría de la objetivación*, "se plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente" (Radford, 2014, p. 135-136). La comprensión y la producción de saberes y subjetividades en el aula, así como la identificación de formas pedagógicas de acción que conlleven a una enseñanza y aprendizaje significativos, son dos de los objetivos de la teoría de la objetivación.

Los principios de la TO se articulan alrededor de cinco conceptos fundamentales relacionados entre sí (Radford, 2006, pp. 123-124):

1. Concepto de *pensamiento*, elaborado en términos no mentalistas. El pensamiento es sobre todo una forma de *re-flexión* activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo (a través de la percepción, gestos, movimientos, etc.), el lenguaje, los signos, etc.
2. Concepto de *aprendizaje*. El aprendizaje es visto como la actividad a través de la cual los individuos entran en relación no solamente con el mundo de los objetos culturales (plano sujeto-objeto) sino con otros individuos (plano sujeto-sujeto o plano de la interacción) y adquieren, en el seguimiento común del objetivo y en el uso social de signos y artefactos, la experiencia humana. "El aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. La adquisición

del saber es un proceso de elaboración activa de significados" (p. 113).

3. Concepto de *sistemas semióticos de significación cultural*, de naturaleza epistemológica. Como toda actividad, el aprendizaje está enmarcado por sistemas semióticos de significación cultural que "naturalizan" las formas de cuestionamiento y de investigación del mundo.
4. Concepto de *objeto matemático*, de naturaleza ontológica. Los objetos matemáticos son definidos como patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social mediatizada por los artefactos. El objeto no es un objeto monolítico u homogéneo. Está compuesto de capas de generalidad que son reconocidas de manera progresiva por el alumno.
5. Concepto de *objetivación*, de naturaleza semiótico – cognitiva. El proceso de objetivación o toma de conciencia subjetiva del objeto cultural. El aprendizaje se define como proceso social de objetivación de esos patrones externos de acción fijos en la cultura.

Un principio esencial de la teoría de la objetivación es la idea de *labor* o *trabajo*, en el sentido que le dieron Hegel, Marx, Leont'ev y el materialismo dialéctico. Es a través de la labor o trabajo cómo los individuos se desarrollan y se transforman continuamente, encontrando en el mismo los sistemas de ideas de la cultura: sistemas de ideas científicas, legales, artísticas, etc. Es también a través de la labor que encontramos formas culturales de ser.

En este marco la enseñanza y aprendizaje no se consideran como dos procesos distintos, sino como labor conjunta en el sentido hegeliano. Lo que ocurre en la escuela, es decir, la enseñanza y aprendizaje no son dos actividades separadas, una llevada a cabo por un profesor que guía al alumno, y la otra por un alumno que hace las cosas por sí y para sí mismo, sino como una sola e inseparable actividad. "En este contexto, la enseñanza-aprendizaje es la expresión de una forma de vida: una labor conjunta que ocurre en un espacio sociopolítico al interior del cual tienen lugar el *conociendo* ("knowing") y el *volviéndose* ("becoming"), esto es volviéndose sujeto en tanto que proyecto histórico-social siempre inconcluso, siempre en movimiento" (Radford, 2014, p. 138).

La teoría de la objetivación adopta el sentido hegeliano de objetivación: algo que está allí y que aparece frente al sujeto, y se presenta, en consecuencia, como una teoría fenomenológica.

> La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente (Radford, 2014, p. 141).

El encuentro con los sistemas culturales de pensamiento debe ser crítico, lo que "significa que el estudiante participa activamente en ese encuentro, en oposición a lo que podría ser una presencia pasiva, que es lo que sucede en el llamado modelo tradicional o modelo transmisivo en el que el estudiante recibe pasivamente la información" (Radford, 2018, p. 68).

El conocer, como proceso ('knowing'), queda definido como toma de conciencia en el curso de un desarrollo social, emocional y sensible; está mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.).

El sujeto que participa en la objetivación es un sujeto concreto y no el sujeto epistémico abstracto de otras teorías (como la de Piaget y la Teoría de Situaciones). Es un sujeto que siente, goza y sufre. El proceso de subjetivación lo define Radford en los siguientes términos:

> La subjetivación consiste en aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo. (Radford, 2014, p. 142)

El sujeto se constituye en tanto que sujeto a través de sus acciones, reflexiones, gozos, sufrimientos, etc. Pero, por otro lado, las acciones a través de las cuales el sujeto se constituye están inmersas en formas de acción y de relación hacia otros que son culturales e históricas.

Desde el punto de vista metodológico se realizan observaciones sistemáticas de la implementación de actividades matemáticas en clases reales. "No se trata de la actividad de un estudiante aislado o la actividad de un profesor aislado, sino un fenómeno evolutivo individual-social que se mueve hacia un objeto (el objeto de la actividad), aunque cada estudiante no perciba el objeto con la misma claridad y comprensión" (Radford, 2015, p. 564). Se trata de identificar evidencias de aprendizaje registrando la manera en que los estudiantes llegan a encontrar formas de pensamiento culturalmente constituidas, imaginando, intuyendo, simbolizando y actuando.

## 2.2 *Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación*

Con la finalidad de facilitar la comprensión de las características de la TO, en esta sección incluimos una síntesis de una investigación diseñada y analizada mediante las herramientas conceptuales y metodológicas de la TO. Se trata de la interpretación de gráficas cartesianas que representan el movimiento relativo de dos estudiantes (Miranda, Radford y Guzmán, 2007).

En el artículo se describen tanto la manera en la que los estudiantes dotan de sentido a las gráficas cartesianas como la forma en la que modifican sus interpretaciones a medida que las relacionan con el movimiento de objetos físicos. La adquisición de las formas interpretativas de gráficas cartesianas en torno al movimiento se concibe como un proceso de aprendizaje, esto es, un proceso social de dotación de significados dentro de una actividad mediatizada por la interacción social, y por los artefactos y signos de naturaleza variada (símbolos matemáticos, lenguaje, gestos, etc.).

La experiencia involucra a estudiantes de grado 10 (15-16 años) durante una clase ordinaria de matemáticas en la que deben interpretar una gráfica cartesiana que refleja el movimiento relativo de dos estudiantes. La recogida de la información se realizó en cuatro fases: 1) grabación de la actividad (esta grabación se realizó con cuatro cámaras de video de las discusiones de los estudiantes en el aula de clase en el momento de resolver la actividad); 2) obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante (si la actividad no había sido terminada en una sesión, las hojas de trabajo se recogían, se digitalizaban y se entregaban nuevamente en la siguiente sesión); 3) transcripción del discurso de los estudiantes durante la solución de la actividad; 4) análisis de videos de la interacción social y procesos de resolución de problemas.

En el artículo se analiza el proceso de objetivación (aprendizaje) de un grupo de tres estudiantes.

Dos estudiantes, Pedro y Marta, se colocan a un metro de distancia uno del otro. Ellos comienzan a moverse en línea recta. Marta, que está detrás de Pedro, tiene una calculadora con un CBR[1] conectado. La gráfica obtenida se ha reproducido abajo. Describan el movimiento de Pedro y Marta para poder obtener tal gráfica.

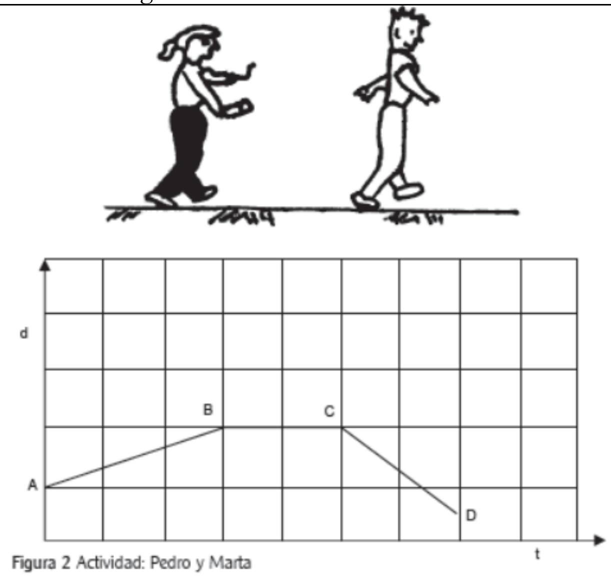


*Figura 1. Actividad: Pedro y Martha (Miranda, et al, 2007m p. 13)*

La tarea que deben resolver los estudiantes se incluye en la Figura 1.

Los diálogos entre los alumnos, y en algunos momentos con el profesor, revelan las interpretaciones iniciales que hacen de los puntos y segmentos representados en el gráfico. En particular, se muestran las dificultades en comprender la variable *d* representada en el eje de ordenadas, distancia relativa entre Marta y Pedro. Los segmentos AB y BC son interpretados como representación del desplazamiento absoluto de un objeto, en este caso Pedro. Las prácticas discursivas se complementan con prácticas gestuales mediante las cuales se señalan posiciones y direcciones del movimiento.

> Vemos ya, pues, cómo la interpretación que hacen los alumnos de la gráfica dada está enmarañada en por lo menos dos espacios: un espacio geométrico y el espacio fenomenológico de evocación del fenómeno. Como veremos más adelante, gran parte de la lucha de objetivación de los alumnos consistirá en articular de manera conveniente los significados propios de cada uno de esos espacios (Miranda, et al, 2007, p. 16).

En el fragmento 2 de la transcripción, las alumnas siguen haciendo manifestaciones (verbales y gestuales) que indican su falta de comprensión del significado de los distintos elementos de la gráfica, lo que lleva a Carla (L17) a reclamar la intervención del profesor. La recta AB es interpretada como la caminata de Pedro y de Marta; el segmento AB es, a la vez, segmento en un plano de expresión geométrico de representación y descripción fenomenológica de movimiento.

En los fragmentos incluidos en el artículo se observa que el modelo instruccional sigue básicamente un patrón de tipo "constructivista", en el sentido de que la responsabilidad de responder a la cuestión planteada, esto es, la interpretación de la gráfica cartesiana como representación del movimiento relativo, es de los estudiantes. Las intervenciones del profesor tienen lugar a requerimiento de los estudiantes y consisten en el planteamiento de cuestiones más afinadas, las cuales apoyan y en cierto modo hacen posible el proceso de objetivación:

> L22. Profesor: Entonces, si hay uno [un niño] que camina más rápido que el otro, ¿la distancia entre los dos va a ser siempre la misma?
>
> L28. Profesor: ¿Y el CBR camina también?

Aunque no conclusiva desde el punto de vista lógico, la estrategia del profesor mueve las piezas discursivas de los alumnos dentro de lo que sería una nueva configuración conceptual de la cual podría esperarse una nueva vía de atacar el problema.

En el fragmento 4 el profesor continúa aportando algunas sugerencias claves:

> L30. Profesor: Bien. Una pregunta que puede ser de ayuda para ustedes. Esto… A [con un bolígrafo, encierra el punto A en un pequeño círculo (figura 7a)]. Aquí A, ¿qué representa en la gráfica? [el profesor desliza varias veces su bolígrafo entre el origen de coordenadas y el punto A].

Estas acciones del profesor (por ejemplo, encerrar el punto A y añadir el número cero) son formas de objetivación de las posiciones de Pedro y Marta en el plano cartesiano. Estas formas diferentes de objetivación a las que recurre el profesor para resaltar el punto A y el origen de coordenadas hacen presente un conocimiento no considerado con anterioridad por las estudiantes. No obstante, las alumnas están completamente perdidas llegando a confundir el punto A con la posición de Marta.

Ante la falta de comprensión de los alumnos de lo que se está representando en el eje de ordenadas, el profesor se decide a aportar un conocimiento más explícito:

> L40. Profesor: Bien. Eso [el metro] representa la distancia entre las dos personas [señala el espacio que hay entre los dibujos de Pedro y Marta].

Tras de su intervención en L44, el profesor dice "ya no digo más", y pasa a interaccionar con otro grupo de alumnos, lo que nos lleva a pensar que está siguiendo un patrón más bien constructivista.

Después de un proceso bastante laborioso, con apoyo del profesor en puntos críticos, las alumnas logran producir el siguiente texto que es una interpretación pertinente del gráfico:

> "Pedro se aleja de Marta caminando más rápido durante tres segundos. Él está ahora a dos metros de ella. Ellos caminan a la misma velocidad durante dos segundos. Pedro reduce su velocidad durante dos segundos, por lo tanto se acerca a Marta."

El análisis de datos se basa en una concepción multimodal del pensamiento humano según el cual se debe tener en cuenta la relación entre los diferentes sistemas semióticos movilizados durante la actividad (el sistema semiótico del lenguaje escrito, el del lenguaje hablado, el de los gestos, el de las acciones, etc.). Las distintas formas de expresión se analizan conjuntamente como partes claves del proceso de objetivación.

En la síntesis y observaciones finales del artículo se afirma que se ha abordado el problema de la transformación de los significados culturales en objetos de conciencia en términos de procesos de objetivación. El interés de los autores fue observar la transformación de los significados de los alumnos en relación a la gráfica de un movimiento relativo (desde el intuitivo o fenomenológico hasta el matemático) teniendo en cuenta los dos niveles de mediatización del proceso de objetivación: el semiótico y el social.

Se reconoce que la objetivación realizada por los alumnos es aún frágil.

> Las objetivaciones de significados matemáticos, como fenómenos de formación de la conciencia que resultan de nuestra participación en prácticas sociales complejas, requieren, podemos conjeturar, periodos de estabilización y reflexión. Lo que es importante señalar es que esa objetivación no es el resultado de una simple asimilación de una práctica y de los significados que ésta moviliza; no es tampoco el resultado del quehacer de un individuo que cogita solo, sino un proceso social, en el que nuestra voz y nuestros gestos

se enredan en las voces y gestos de los otros (p. 27).

## 3 Enfoque ontosemiótico: hacia un sistema teórico inclusivo

Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas y semióticas, para tratar de dar respuesta a cuestiones fundamentales para la educación matemática, tales como: *¿Qué es un objeto matemático?*; o de manera equivalente, *¿cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada,...) en un contexto o marco institucional determinado?* o *¿qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?*

### 3.1 *Principios y conceptos básicos del EOS*

Con un estilo que recuerda los trabajos de fundamentación axiomática de las matemáticas, desde sus comienzos, el EOS ha estado motivado por la necesidad de clarificar y articular nociones de otros marcos teóricos, en particular nociones usadas en el seno de la didáctica francesa (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006), y el deseo de hacer compatibles las concepciones epistemológicas y cognitivas en la didáctica de las matemáticas. Para ello se parte de introducir la noción de práctica matemática en los siguientes términos:

> Una práctica matemática es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Se asume que las prácticas (operativas y discursivas) pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; ese compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y están generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma institución, sus reglas y modos de funcionamiento.

Si bien la noción de práctica matemática está en la base, tanto del modelo epistemológico como del cognitivo del EOS, el objeto matemático no desaparece de la escena, ya que los objetos intervienen y emergen de las prácticas matemáticas en una relación dialéctica constituyente (Font, Godino y Gallardo, 2013).

Estas nociones fueron complementadas en trabajos posteriores (Godino, 2002) con una tipología de objetos (problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos matemáticos primarios (problematización, comunicación, definición, enunciación, algoritmización, argumentación), así como con una interpretación de la noción de *función semiótica* (relación triádica entre dos objetos, antecedente y consecuente, según un criterio o regla de correspondencia) que permite elaborar una noción operativa del conocimiento, significado, comprensión y competencia (Figura 2).

En el EOS se postula que los sistemas de prácticas y los objetos emergentes de ellas, dependen de los contextos de uso, las instituciones en que tienen lugar las prácticas y los sujetos implicados en las mismas (juegos de lenguaje y formas de vida, según Wittgenstein, 1953). La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se puede hacer de una manera global con la noción de *sistemas de prácticas personales.* Esta noción queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Así mismo, la comprensión y el conocimiento se conciben en su faceta dual personal – institucional, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas ante ciertos tipos de tareas problemáticas.

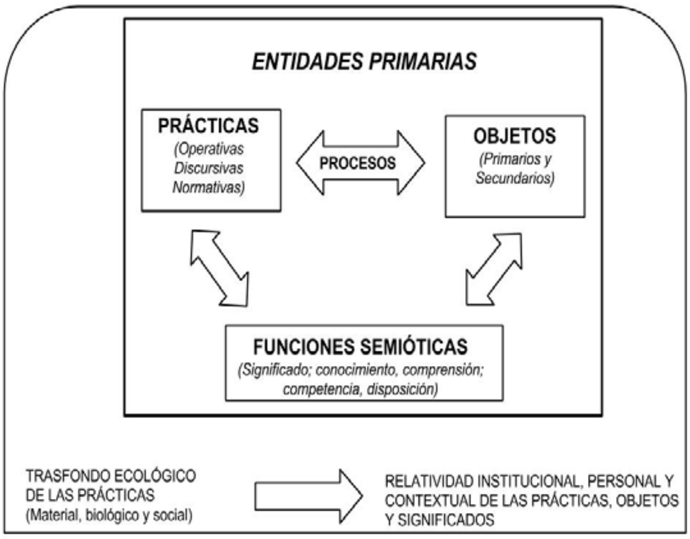


*Figura 2: Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS*

En el EOS la noción de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas y misteriosas. El *significado* de un objeto matemático es el *contenido* de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo – intensivo, personal o institucional; puede referirse a un *sistema de prácticas*, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.). El *sentido* se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

En trabajos más recientes el modelo ontosemiótico del conocimiento matemático se ha ampliado con otros supuestos y herramientas teóricas, en particular la noción de configuración y trayectoria didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006), que permite abordar cuestiones de tipo instruccional:

> *¿Qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos?*

Las nociones de dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) e idoneidad didáctica (Godino, 2013), se introducen para hacer posible la reflexión meta-didáctica planteando nuevas preguntas:

> *¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?*
>
> *¿En qué medida se puede valorar como idóneo un proceso de instrucción en unas circunstancias dadas y qué cambios se podrían introducir para mejorar dicha idoneidad?*

Los postulados ontológicos del EOS se corresponden con los formulados en la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (Baker & Hacker, 1985; Bloor, 1983; Wittgenstein, 1978):

> Los conceptos/definiciones y las proposiciones son consideradas como reglas ‘gramaticales’ de un cierto tipo. Desde este punto de vista, los enunciados matemáticos son reglas (de tipo gramatical) que gobiernan el uso de cierto tipo de signos, puesto que precisamente es así como se usan, como reglas. No describen propiedades de objetos matemáticos con ningún tipo de existencia que sea independiente de las personas que deseen conocerlos o del lenguaje mediante el cual se conocen (Font, Godino y Gallardo, 2013, p. 110).

Desde el punto de vista metodológico el EOS tiene en cuenta las cuatro fases propias de las investigaciones orientadas al diseño educativo: estudio preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). En cada una de ellas se tienen en cuenta las siguientes facetas o dimensiones:

- *Epistémica-ecológica.* Se determinan los significados institucionales puestos en juego en cada una de las fases del proceso; tales significados son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Asimismo, se observa el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio.
- *Cognitiva-afectiva.* Se describen los significados personales de los estudiantes en los distintos momentos del proceso de instrucción, en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de objetos y procesos matemáticos. Además, se analiza la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al proceso de instrucción seguido.
- *Instruccional (interaccional-mediacional).* Se analizan los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuencia, orientada a la fijación y negociación de significados. Asimismo, se describen los recursos técnicos previstos o utilizados y se valora el uso del tiempo destinado a las distintas acciones y procesos, así como los agentes participantes y su papel.

En el marco del EOS se aboga por un modelo instruccional mixto al considerar que la optimización del aprendizaje implica una combinación dialéctica y compleja entre los roles del profesor como instructor (transmisor) y facilitador (gestor) y los roles del estudiante como constructor de conocimiento y receptor activo y crítico de información significativa

(Burgos y Godino, 2019; Godino, Batanero, Cañadas, Contreras, 2016; Godino, Rivas, Burgos y Wilhelmi, 2018).

### 3.2 *Análisis ontosemiótico de la actividad de Pedro y Marta*

En el EOS se considera necesario hacer un análisis a priori de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver un problema, teniendo en cuenta diferentes soluciones posibles, la trama de objetos que intervienen, los diversos tipos de significados y grados de generalidad implicados. Esto se considera básico para comprender la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas e identificar los conocimientos implicados, los conflictos potenciales de los estudiantes y prever momentos de institucionalización.

La solución a la actividad de Pedro y Marta que se pretende elaboren las alumnas tiene un carácter informal y podría ser formulada en los términos de la Figura 3:

En la gráfica cartesiana, sobre el eje de ordenadas se representa la distancia *d* que separa a Marta y Pedro, mientras que en el eje de abscisa se representa el tiempo *t* transcurrido a medida que se mueven en línea recta.
El punto A sobre el eje de ordenadas señala la distancia de 1m que separa a Marta y Pedro en el tiempo $t = 0$.
Transcurridos tres segundos la distancia que los separa es de 2 m, según indican las coordenadas del punto B.
El segmento AB representa la variación lineal de la distancia entre los chicos transcurridos 3 segundos.
Pedro camina más deprisa que Marta en los primeros 3 segundos porque la distancia se va incrementando, pasando de 1m en el punto A a 2m en el punto B.
En el intervalo de tiempo entre 3 y 5 segundos la distancia que separa a los chicos se mantiene constante a 2m, según indica el carácter horizontal del segmento BC. Por tanto, ambos caminan a la misma velocidad.
En el intervalo de tiempo entre 5 y 7 segundos la distancia que separa a los chicos disminuye, según indica el segmento CD con pendiente negativa (decreciente), pasando de 2m a 0,5m. Por tanto, Pedro disminuye su distancia respecto a Marta.

*Figura 3. Secuencia de prácticas de la solución informal pretendida de la actividad de Pedro y Marta*

En la Tabla 1 indicamos los objetos que intervienen en las prácticas operativas y discursivas 1) a 7) así como el papel que desempeñan dichas prácticas en el proceso de resolución. Los términos y expresiones que componen la práctica discursiva 1) refieren a diversas entidades conceptuales (gráfica cartesiana, ejes de ordenadas y abscisas, magnitudes), como se indica en la segunda columna de la tabla. También se está refiriendo al proceso de modelización funcional del movimiento relativo de los dos estudiantes. El sujeto que interpreta el texto de la práctica debe establecer las funciones semióticas entre dichos términos o expresiones y las entidades conceptuales correspondientes, siguiendo las convenciones matemáticas previamente aprendidas. Globalmente, la práctica discursiva 1) desempeña un papel en el proceso resolutivo y se realiza con una intencionalidad que son reflejados en la columna 3 de la tabla.

La tarea que se pide a los estudiantes es interpretar una gráfica cartesiana que representa una función definida a trozos, afín en cada uno de ellos, que modeliza un fenómeno físico del movimiento relativo no uniforme de dos personas que caminan en la misma dirección, medido con un dispositivo que registra la distancia que las separa en función del tiempo. La Tabla 1 refleja con detalle la trama compleja de funciones semióticas que se ponen en juego en la solución informal de la tarea requerida, esto es, los conocimientos previos que el interpretante debe movilizar y los nuevos conocimientos emergentes que constituyen la solución de la tarea.

Hay dos magnitudes en juego: la distancia que separa a las dos personas y el tiempo que transcurre en el intervalo de 7 segundos. Una *función semiótica crítica* (Contreras, Molina-Portillo, Godino, Rodríguez-Pérez y Arteaga, 2017) es la que se establece al interpretar la letra *d* que aparece en el eje de ordenadas como la distancia relativa entre los dos estudiantes. Inicialmente están separadas 1m cuando el tiempo empieza a correr. Es crucial comprender que el eje de ordenadas marcado con la letra *d* refleja la distancia que separa las dos personas (distancia relativa), la cual cambia en función de la variable tiempo *t* reflejada en el eje de abscisas.

La expresión algebraica de la dependencia entre *d* y *t* es la función $d=f(t)$ definida a trazos siguiente:

$f(t) = \frac{1}{3}t + 1$, en el intervalo $[0,3)$,

$f(t) = 2$, en el intervalo $[3,5)$ ,

$f(t) = -0.75t + 5.75$ en el intervalo $[5,7)$.

La descripción del movimiento relativo de Pedro y Marta se podría hacer con un nivel 3 de algebrización según el modelo propuesto por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), en los términos de la Figura 4. La formación matemática de los alumnos debería contemplar el paso de una solución informal del tipo descrito en la Figura 3, como un primer encuentro con este tipo de tareas de interpretación de gráficas de funciones, a una solución más formal, lo cual implica aplicar herramientas de tipo algebraico, como las incluidas en la Figura 4.

En la Tabla 2 indicamos los objetos que intervienen en las prácticas operativas y discursivas 1) a 8) de la Figura 4 así como el papel que desempeñan dichas prácticas en el proceso de resolución. Las funciones semióticas críticas que se deben movilizar en la solución algebraica de la tarea son las asignaciones a cada segmento de la gráfica de la ecuación algebraica correspondiente (procedimiento de ecuación de la recta que pasa por dos puntos).

En cualquier caso, es esencial tener en cuenta los conocimientos previos que se requieren para

*Tabla 1: Objetos y significados en la solución informal*

| **Secuencia de prácticas (Figura 3)** | **Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos; procesos)** | **Uso e intencionalidad de las prácticas** |
|---|---|---|
| 1) | Conceptos: gráfica cartesiana; eje de ordenadas; eje de abscisas; magnitudes distancia y tiempo; movimiento rectilíneo<br>Lenguajes: natural; gráfico; simbólico (d, t; A, B, C, D)<br>Proceso de modelización, fenómeno espacio-temporal del movimiento relativo (distancias-tiempo) representado en gráfico abscisas - ordenadas. | Fijar el contexto de interpretación del espacio físico y del espacio geométrico. |
| 2) | Conceptos: abscisa y ordenada de un punto; magnitudes distancia y tiempo; cantidades, 1m, 0s.<br>Proceso: conversión del registro gráfico al físico espacio-temporal | Interpretar las coordenadas del punto A como par de cantidades de magnitudes tiempo-espacio. |
| 3) | Conceptos: (similar a 2) | Interpretar las coordenadas del punto B como par de cantidades de magnitudes tiempo-espacio. |
| 4) | Conceptos: segmento; incremento de abscisas y ordenadas; variación lineal (proporcionalidad); cantidad de tiempo.<br>Proceso: conversión de los incrementos en abscisas y ordenadas en términos del registro físico | Interpretar el segmento AB en términos del fenómeno físico. |
| 5) | Conceptos: velocidad y los ya mencionados<br>Proposición 1. La distancia aumenta<br>Argumento 1: La pendiente de la recta AB es positiva<br>Proposición 2: Pedro camina más deprisa que Marta<br>Argumento 2: La distancia entre Pedro y Marta aumenta | Interpretar la pendiente positiva del segmento AB en términos del fenómeno físico. |
| 6) | Conceptos: ya mencionados<br>Proposición 3: La distancia se mantiene constante;<br>Argumento 3: El segmento BC es horizontal<br>Proposición 4: Pedro y Marta caminan a la misma velocidad<br>Argumento 4: La distancia entre Pedro y Marta se mantiene constante (P3) | Interpretar el segmento BC y su carácter horizontal (pendiente 0) en términos del fenómeno físico. |
| 7) | Conceptos: ya mencionados<br>Proposición 5: La distancia disminuye<br>Argumento 5: La pendiente de CD es negativa<br>Proposición 6: Pedro camina más deprisa<br>Argumento 6: Porque la distancia disminuye (P5) | Interpretar el segmento CD y su pendiente negativa en términos del fenómeno físico. |

1) La gráfica representa la relación funcional entre la distancia, $d$, que separa a Marta y Pedro, indicada en el eje de ordenadas, y el tiempo transcurrido, $t$, variable indicada en el eje de abscisas.
2) Inicialmente, es decir cuando $t$=0, la distancia que separa a Pedro y Marta es $d$=1m, según refleja el punto A.
3) Transcurridos 3 segundos la distancia que los separa es 2m (punto B).
4) En el intervalo [0,3) la distancia que separa a Pedro y Marta viene dada por la relación $d = (1/3)t+1$, expresión obtenida teniendo en cuenta que la pendiente de la recta AB es 1/3 y la ordenada en el origen 1.
5) La velocidad relativa de Pedro respecto de Marta es $\frac{1}{3}$ m/s.
6) En el intervalo de tiempo [3,5) la distancia entre Pedro y Marta se mantiene constante en 2 m. Esto es, $d$= 2, en el intervalo, [3,5).
7) En el intervalo de tiempo [5, 7) la distancia viene dada por la relación $d= - 0.75t + 5.75$ obtenida aplicando la ecuación de la recta que pasa por los puntos C(5,2) y D(7, 0.5).
8) La velocidad relativa de Pedro en el intervalo de tiempo [5,7) es de -0,75 m/s por lo que la distancia de Pedro respecto de Marta disminuye.

*Figura 4. Secuencia de prácticas de la solución algebrizada de la actividad de Pedro y Marta*

abordar la solución de un problema y si están disponibles para los estudiantes. El criterio de idoneidad cognitiva del proceso de instrucción (Godino, 2013) requiere que los nuevos conocimientos pretendidos supongan un reto alcanzable para los estudiantes, teniendo en cuenta los recursos disponibles y las interacciones personales, esto es, que estén en la zona de desarrollo próximo. El proceso de instrucción es muy diferente si se trata de un "primer encuentro" de los estudiantes con un contenido nuevo, en cuyo caso el papel del profesor debe ser más protagonista. Por el contrario, el dominio de destrezas y la aplicación de conocimientos pueden realizarse con un mayor grado de autonomía por parte de los estudiantes.

Un postulado básico del EOS es reconocer una pluralidad de significados a cualquier objeto o contenido matemático. Estos significados pueden variar según diversos grados de generalidad expresables con diferentes niveles de algebrización (Godino, et al., 2014). El primer encuentro de los estudiantes con un contenido nuevo deberá abordarse poniendo en juego significados informales expresados con lenguaje natural o proto-algebraicos, sin perder de vista que el crecimiento matemático de los alumnos debe prever el abordaje de significados progresivamente más generales expresados con lenguaje algebraico.

## 4 Concordancias y complementariedades

En Godino, Batanero y Font (2019) se han descrito los problemas epistemológico, ontológico, semiótico-cognitivo, educativo-instruccional y ecológico que aborda el EOS, enunciando las preguntas que los definen, los principios básicos asumidos y el método propuesto para abordar la solución de los problemas. En esta sección trataremos de poner en relación estos elementos con los correspondientes de la TO con el fin de identificar posibles concordancias y complementariedades.

### 4.1 *Problemas epistemológico y ontológico*

QE1: ¿Cómo emerge y se desarrolla la matemática?

QO1: ¿Qué es un objeto matemático? ¿Qué tipos de objetos intervienen en la actividad matemática?

En la TO, al igual que en el EOS, se asumen unos principios epistemológicos y ontológicos sobre el conocimiento matemático y su aprendizaje que son compartidos por las aproximaciones socioculturales:

p1: el conocimiento es históricamente generado durante el curso de la actividad matemática de los individuos. Radford (2018, p. 4066).

p2: la producción del conocimiento no responde a un pilotaje adaptativo, sino que está inmerso en formas culturales de pensamiento imbricadas con una realidad simbólica y material que proporciona la base para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos y los conceptos e ideas que se forman de ellas (Radford, 2018, pp. 4066-4067).

En la TO "los objetos matemáticos son definidos como patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, 2008, p. 222). Esto supone separarse de las

*Tabla 2: Objetos y significados en la solución algebraica*

| **Secuencia de prácticas (Figura 4)** | **Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos; procesos)** | **Uso e intencionalidad de las prácticas** |
|---|---|---|
| 1) | Conceptos: relación funcional; variable independiente tiempo *t;* variable dependiente, distancia *d*; ejes cartesianos; magnitudes distancia y tiempo.<br>Proceso de modelización funcional del fenómeno espacio-temporal del movimiento relativo expresada gráficamente. | Interpretar la gráfica como medio de expresión de una función, $d=f(t)$ |
| 2) | Conceptos: abscisa y ordenada de un punto; magnitudes distancia y tiempo; cantidades, 1m, 0s.<br>Proceso: conversión del registro gráfico al físico espacio-temporal | Interpretar las coordenadas de del punto A como par de cantidades |
| 3) | Conceptos: (similar a 2) | Interpretar las coordenadas del punto B como par de cantidades |
| 4) | Conceptos: intervalo de números reales; función afín; pendiente; ordenada en el origen.<br>Proposición: $d = \frac{1}{3}t+1$<br>Argumento: procedimiento de hallar la ecuación de la recta | Interpretar el segmento AB en términos del fenómeno físico y modelizarlo mediante una función afín. |
| 5) | Conceptos: velocidad; magnitud, cantidad<br>Proposición: velocidad $\frac{1}{3}$ m/s.<br>Argumento: pendiente de la recta | Interpretar la pendiente positiva del segmento AB en términos del fenómeno físico |
| 6) | Conceptos: intervalo de números reales; función constante<br>Proposición: $f(t) = 2$ en $[3,5)$<br>Argumento: porque la distancia se mantiene constante | Interpretar el segmento BC |
| 7) | Proposición: $d= - 0.75t + 5.75$ en $[5,7)$<br>Argumento: procedimiento de cálculo de recta que pasa por dos puntos. | Interpretar funcionalmente el segmento CD |
| 8) | Proposición: la velocidad de Pedro decrece a razón de -0,75m/s<br>Argumento: la pendiente de la recta CD es negativa con valor -0,75 | Describir el movimiento relativo en el intervalo $[5,7)$ |

ontologías platonistas y realistas y sus correspondientes concepciones de los objetos matemáticos como objetos eternos que preceden a la actividad de los individuos. "También se aparta de ontologías racionalistas y su concepción de los objetos matemáticos como productos de una mente que trabaja plegada sobre sí misma trabajando de acuerdo con las leyes de la lógica" (p. 221).

El EOS comparte una posición antropológica similar sobre la naturaleza de la matemática y sobre los objetos emergentes de la misma, pero adopta una perspectiva más amplia sobre la noción de objeto matemático, sus tipos, naturaleza y funciones. Parece que en la TO cuando se habla de objeto matemático se está pensando en objetos conceptuales, para los cuales en el EOS se tiene una doble conceptualización:

- Desde una perspectiva unitaria, como reglas gramaticales en el sentido de Wittgenstein (conceptos - definición), y
- En un sentido sistémico, como configuración de prácticas operativas, discursivas y normativas,

junto con la trama de otros objetos y procesos relacionados (configuración ontosemiótica).

Consideramos que la herramienta configuración ontosemiótica (en su doble versión, epistémica y cognitiva) permite hacer un análisis detallado de la actividad matemática y los objetos implicados, que, como se muestra en la sección 3.2, no se reducen a los objetos conceptuales o abstractos. El reconocimiento de la trama compleja de los objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problemas es un factor explicativo de las dificultades de aprendizaje y de enseñanza, y un paso necesario para una gestión idónea de los procesos educativos-instruccionales.

Objeto matemático en EOS es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización. Son objetos matemáticos, no solo los elementos regulativos, patrones de actividad, sino también los propios elementos lingüísticos y artefactos que median la actividad, como también las propias situaciones - problemas que la motivan. No hay actividad matemática sin objetos, ni objetos sin actividad. Como las prácticas pueden ser vistas desde la perspectiva social (institucionales, compartidas) o personal (individuales, idiosincrásicas), los objetos también pueden ser vistos desde la dualidad institucional – personal.

### 4.2 *Problema semiótico-cognitivo*

QSC1: ¿Qué es conocer un objeto matemático? ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Para abordar el problema semiótico - cognitivo la TO ha introducido la noción de objetivación, entendida como toma de conciencia subjetiva del objeto cultural. Para la TO, un proceso de objetivación es un proceso de elaboración activa de significados. “La objetivación es, precisamente, ese proceso social de toma de conciencia progresiva del *eidos* homérico, esto es, de algo frente a nosotros; una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido” (Radford, 2006, p. 116).

En el marco del EOS la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto (individuo o institución) se define en términos de las funciones semióticas que dicho sujeto puede establecer, en las que se pone en juego O (como expresión o contenido) (Godino, et al, 2007). Cada función semiótica implica un acto de interpretación y constituye un conocimiento. Así queda establecida una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas por el modelo ontosemiótico.



Nos parece que el proceso de objetivación viene a ser equivalente en términos cognitivos y educativos al proceso de personalización de los significados institucionales /culturales por parte de los estudiantes que propone el EOS. Además, la consideración de los objetos conceptuales en su versión unitaria como reglas convenidas socialmente y referidas a cómo se deben usar los lenguajes y artefactos, ayuda a comprender las dos fuentes de aprendizaje que propone la TO: el contacto con el mundo material, el mundo de los artefactos culturales que nos rodean (objetos, instrumentos, etc.), y la interacción social. Lo que hay que aprender son las reglas de uso de los artefactos convenidas socialmente.

El principio multimodal del pensamiento en la TO se corresponde en el EOS con el componente *lenguajes* de las configuraciones ontosemióticas, como medio de expresión ostensiva (oral, escrita, gráfica, gestual, simbólica) de las restantes entidades primarias (situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos). En la sección 3.2 se ha mostrado la variedad de lenguajes que se ponen en juego en las soluciones de la tarea de descripción del movimiento de Pedro y Marta, así como la trama de objetos y funciones semióticas implicadas.

### 4.3 *Problema educativo-instruccional*

QEI1: ¿Qué es la enseñanza? ¿Qué es el aprendizaje? ¿Cómo se relacionan?

QEI2: ¿Qué tipos de interacciones entre personas, conocimientos y recursos se deberían implementar en los procesos instruccionales para optimizar los aprendizajes?

En el EOS el aprendizaje se entiende como el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. La enseñanza supone la participación del estudiante en la comunidad de prácticas fijada por la institución, en donde la finalidad es que se produzca el aprendizaje, que implica la adquisición por parte del estudiante de dichos significados institucionales.

Pensamos que el principio de aprendizaje formulado por Radford se puede asumir de manera natural en el EOS: “p3: el aprendizaje es el logro de una pieza de conocimiento culturalmente – objetiva que los estudiantes consiguen mediante un proceso social de objetivación mediadas por signos, lenguaje, artefactos e interacción social a medida que los estudiantes se implican en formas culturales de reflexión y acción" (Radford, 2018, p. 4067). En el análisis de la actividad de Pedro y Marta desde la perspectiva de la TO descrito en la sección 2, el interés de Miranda et al. (2007) fue observar la transformación de los significados de los alumnos en relación a la gráfica de un movimiento relativo, teniendo en cuenta los dos niveles de mediatización del proceso de objetivación: el semiótico (del lenguaje escrito, el del lenguaje hablado, el de los gestos) y el social. Se acepta que el aprendizaje, como proceso social de objetivación, consiste en dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura.

El modelo educativo-instruccional que propone la TO, basado en la teoría de la actividad y la noción de zona de desarrollo próximo, con el principio de "trabajar juntos" (Radford, 2014), es asumido por el EOS, aunque no de manera exclusiva. De hecho, en Burgos y Godino (2019) se adopta como guía de la experiencia de enseñanza sobre iniciación al razonamiento proporcional con alumnos de 5º curso de primaria. El modelo de instrucción (relación entre enseñanza y aprendizaje de un contenido específico) que se asume en el EOS está basado en los principios de la psicología cultural /discursiva (Lerman, 2001; Radford, 2008), la cual atribuye un papel clave a la noción de "zona de desarrollo potencial" (Vygotsky, 1934). En consecuencia, contrariamente a los modelos constructivistas, la autonomía del estudiante en el proceso de aprendizaje es el resultado de dicho proceso y no un prerrequisito de este.

En el marco del EOS se asume que los tipos de *configuraciones didácticas* que promueven el aprendizaje pueden ser diversos dependiendo de los tipos de conocimientos pretendidos, del estado inicial del conocimiento de los sujetos, del contexto y circunstancias del proceso instruccional. Los modelos de instrucción constructivista (autonomista), colaborativo, personal o magistral pueden tener su lugar (Godino, et al., 2006). Cuando se trata del aprendizaje de un contenido nuevo y complejo nos parece que la transmisión de conocimientos en momentos específicos, por parte del profesor, o por el alumno líder en el seno de los equipos de trabajo, puede ser crucial en el proceso de aprendizaje. Esa transmisión puede ser significativa cuando los estudiantes están participando de la actividad y trabajando colaborativamente.

El análisis ontosemiótico de las soluciones previstas del problema revela el saber cultural /matemático al que deben llegar los alumnos, como el reflejado en las Tabla 1 (solución informal) y Tabla 2 (solución algebrizada) de la actividad de Pedro y Marta. Nos parece que se trata de un saber científico altamente elaborado al que no se puede llegar de manera espontánea, cuando los saberes puestos en juego tienen la complejidad que el análisis ontosemiótico revela.

Consideramos que una diferencia sustancial entre la TO y el EOS está en los fines de la investigación didáctica pretendidos en cada teoría. La TO se propone básicamente describir los procesos de objetivación de los sujetos y relacionar/explicar tales procesos en términos de la enseñanza. "La investigación de la objetivación se enfoca en la manera en que las formas cultural e históricamente codificadas de pensamiento y acción se convierten en objetos de reconocimiento u objetos de conciencia" (D'Amore y Radford, 2017, p. 123).

El EOS, además de ese objetivo descriptivo/explicativo, asume la finalidad de estudiar las condiciones de realización de la actividad matemática y didáctica de la manera más *idónea* posible teniendo en cuenta los sujetos y circunstancias implicadas (Godino et al, 2019).



### 4.4 *Problema ecológico e idoneidad didáctica*

En el EOS se han elaborado herramientas para analizar la diversidad de factores y normas que pueden condicionar los procesos de enseñanza y aprendizaje, problema que enuncia en los siguientes términos:

QEC1: ¿Qué factores condicionan y soportan el desarrollo de los procesos instruccionales y qué normas los regulan?

También se considera que el fin último de la investigación didáctica es la mejora del aprendizaje y para ello es necesario contar con una serie de criterios que aseguren dicha optimización, como se recoge en la siguiente cuestión:

QOA1. ¿Qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?

Hasta donde alcanza nuestro conocimiento de la TO estas cuestiones no son abordadas en esta teoría.

En el EOS se han elaborado dos herramientas específicas: dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) e idoneidad didáctica (Godino 2013).

El énfasis de la TO sobre la dimensión ética y política de la educación matemática se tiene en cuenta en el EOS a través de las dimensiones afectiva (Beltrán-Pellicer y Godino, 2019) y ecológica de la idoneidad didáctica, donde se contempla como criterio de idoneidad la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico. El desarrollo de estos valores humanistas y éticos no debe relegar, sin embargo, el desarrollo de la racionalidad y el pensamiento matemático. En la figura 4 se describe la secuencia de prácticas de una solución algebrizada de la actividad de Pedro y Marta cuyo dominio progresivo por parte de los estudiantes debería ser un objetivo claro de su formación matemática.

## 5 Síntesis, limitaciones y cuestiones abiertas

El modelo epistemológico propuesto por el EOS es concordante, en líneas generales, con el correspondiente a la TO. Ambas teorías comparten supuestos antropológicos similares sobre la actividad matemática y sobre los procesos y productos socioculturales emergentes. El EOS, no obstante, incorpora en su concepción de las matemáticas, de manera explícita, los elementos básicos del giro lingüístico introducido por Wittgenstein en la filosofía de las matemáticas y los aportes de la semiótica Peirceana, para describir y explicar los procesos de comunicación e interpretación matemática.

El cambio antropológico y sociocultural en la manera de concebir las matemáticas que asumen ambas teorías no ha supuesto el olvido de la dimensión cognitiva, esto es, del papel del sujeto que aprende matemáticas y se forma como persona. Por esta razón el EOS introduce, junto a un modelo de cognición institucional otro modelo de cognición individual, construido sobre sus mismas bases pragmáticas, antropológicas y semióticas.

Se observa una diferencia relevante entre ambas teorías relativa al desarrollo desigual de las dimensiones institucional y personal del conocimiento matemático. Nos parece que la TO ha centrado la atención de manera preferente en la dimensión cognitiva (personal) y los procesos de aprendizaje, mientras que el EOS ha desarrollado herramientas que atienden tanto a la dimensión institucional como personal del conocimiento. El análisis a priori de posibles soluciones de la actividad de Pedro y Marta (sección 3.2) y el reconocimiento de prácticas, objetos y procesos, es un análisis epistémico o institucional al referirse a un sujeto epistémico o ideal. Este análisis a priori se considera útil, incluso necesario, para comprender y gestionar el proceso de aprendizaje que tiene lugar con sujetos individuales reales. Ese aprendizaje se puede describir mediante la herramienta configuración ontosemiótica en su versión cognitiva, aplicada a las respuestas y diálogos de los estudiantes.

El análisis realizado de la TO desde la perspectiva del EOS nos ha permitido identificar algunos puntos fuertes de la TO, que en cierto modo pueden enriquecer al EOS, al estar asumidos de manera implícita y ser compatibles con los restantes principios; en concreto:

1. El modelo de aprendizaje sociocultural resumido en la metáfora "trabajar juntos" profesor y estudiantes en tareas matemáticas relevantes y significativas.
2. El énfasis en la dimensión ética y política de la educación matemática que considera la formación de sujetos comprometidos, críticos y responsables a la par que su formación matemática.

Así mismo, algunos aspectos centrales del EOS pueden enriquecer a la TO; en particular:

1. El abordaje de los problemas ontológico y epistemológico sobre las matemáticas con la herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, la cual permite hacer análisis pormenorizados y explícitos de la actividad matemática, tanto desde el punto de vista institucional como personal.
2. En la dimensión educativa-instruccional, la herramienta configuración didáctica y la noción de idoneidad didáctica ayuda a comprender la dinámica y complejidad de las interacciones entre el contenido, el docente, discentes y el medio.

La optimización del aprendizaje puede tener lugar localmente mediante un modelo mixto que articula la transmisión de conocimientos, la indagación y la colaboración, modelo gestionado mediante criterios de idoneidad didáctica interpretados y adaptados al contexto por el profesor.

Con este trabajo se pretende iniciar un proceso de diálogo entre la TO y el EOS. El objetivo ha sido presentar una síntesis de las cuestiones y principios que caracterizan ambas teorías, iniciar su comparación y explorar algunas concordancias y complementariedades. Las teorías se pueden considerar como herramientas para abordar la solución de problemas de un campo de conocimiento, produciendo resultados en la forma de descripciones, explicaciones, predicciones y en el caso de la didáctica, recursos para una acción idónea sobre la enseñanza y aprendizaje. Será necesario analizar y comparar los resultados que la aplicación de las herramientas de la TO y el EOS vienen produciendo en otras investigaciones experimentales, que en este trabajo ha quedado limitada a la tarea de Pedro y Marta.

Algunas cuestiones quedan abiertas sobre la articulación de la TO y del EOS. Planteadas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de un tema matemático específico, como puede ser el de la interpretación de gráficas cartesianas que modelizan un fenómeno físico:

*¿Cómo se podría optimizar el proceso de objetivación cuando se trata del primer encuentro del estudiante con un nuevo objeto, o se trata del trabajo de una técnica para su dominio, o de la aplicación del objeto a nuevos problemas o contextos?*

*¿Cuál es el papel de la transmisión significativa de conocimientos en el primer encuentro del proceso de aprendizaje de un objeto matemático nuevo?*

*¿Cuál es el papel de la indagación personal de los estudiantes como medio de promover su progresiva autonomía y creatividad?*

*¿Qué papel desempeña la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la TO y el EOS?*

Será necesario estudiar qué tipo de respuestas dan la TO y el EOS a estas cuestiones y en qué medida con compatibles y articulables.

## 6 Referencias Bibliográficas


Baker, G. P., & Hacker, P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations* (Vol. 2). Glasgow, Scotland: Basil Blackwell.

Beltrán-Pellicer, P. & Godino, J. D. (2019). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education*, 50(1), 1-20 Published online https://doi.org/10.1080/0305764X.2019.1623175

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds) (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education.* Berlin: Springer.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge.* London, England: The Macmillan Press.

Burgos, M. & Godino, J. D. (2019). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema*, 33 (63), 1-21.

Contreras, J. M, Molina-Portillo, E. Godino, J. D., Rodríguez-Pérez, C. & Arteaga, P. (2017). Funciones semióticas críticas en el uso de diagramas de barras por los medios de comunicación. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B., & Radford L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97–124.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. & Contreras, J. M. (2014). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics and experimental sciences. *Acta Scientiae*, 18 (4), 2016.

Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39 (1), 37- 42.

Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. & Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014) Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34, 2/3, p. 167-200.

Godino, J. D., Rivas, H., Burgos, M. & Wilhelmi, M. D. (2019). Analysis of didactical trajectories in teaching and learning mathematics: overcoming extreme objectivist and constructivist positions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14 (1), 147-161.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 87-113

Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19 (3), 5-30.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 165-178.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial, pp. 7-22.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring, and F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Sense Publishers.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8 (18), 547-567.

Radford, L. (2018). On theories in mathematics education and their conceptual differences. En, B. Sirakov, P. de Souza, & M. Viana (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 4, pp. 4055–4074). Singapore: World Scientific Publishing Co.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* New York, NY: The MacMillan Company.

Wittgenstein, L. (1978). *Remarks on the foundations of mathematics* (3rd. ed.). Oxford, England: Basil Blackwell.

Vygotski, L. (1986) [1934]. *Thought and language.* Cambridge, MA.: MIT Press [Trad. cast.: Pensamiento y lenguaje. Barcelona: Paidós, 1995.

RECME
Editorial Smart Smath
Alianza ASOCOLME - Grupo Editorial GAIA
Revista Colombiana de Matemática Educativa

Como citar este artículo:

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. (2020). Concordancias y complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el Enfoque Ontosemiótico. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa.* 5 (2), pp. 51-66.

Presentado: 14/octubre/2019
Aprobado: 25/marzo/2020
Publicado: 23/agosto/2020

## RECONOCIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00, Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Grupo S36_17D Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo), España.