Épsilon - Revista de Educación Matemática *2018, nº 100, 49-63*

El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria

Antonio Francisco Roldán López de Hierro
Universidad de Granada

Carmen Batanero
Universidad de Granada

Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Zaragoza e IES Valdespartera

Resumen: *Los diagramas de árbol permiten representar la estructura de muchos problemas combinatorios y probabilísticos, facilitando su resolución. No obstante, la investigación sobre el tema muestra la existencia de dificultades en la construcción e interpretación de diagramas de árbol por parte de los estudiantes, posiblemente debido a que en la enseñanza no reciben la atención necesaria. En este artículo analizamos las propiedades del diagrama de árbol y las dificultades experimentadas en el trabajo con los mismos descritas en la investigación previa. Finalmente mostramos ejemplos de las oportunidades de aprendizaje que ofrece en la combinatoria y probabilidad, incluyendo la argumentación de algunos teoremas. Como conclusión, sugerimos la necesidad de su uso, desde edades tempranas, para conformar intuiciones correctas que luego se aplicarán durante todo el periodo de formación en probabilidad y combinatoria.*
Palabras clave: *Diagrama de árbol, intuiciones, probabilidad, combinatoria.*

Tree diagram: an intuitive resource in probability and combinatorics

Abstract: *Tree diagrams allow representing the structure of many combinatorial and probabilistic problems, facilitating their resolution. However, research on this topic shows the existence of difficulties in the construction and interpretation of tree diagrams by students, possibly because they do not receive the necessary attention in teaching. In this work we analyze the properties of tree diagrams and the difficulties when working*

with them described in previous research. Finally, we show examples of learning opportunities offered in probability and combinatorics, including the understanding of some probability theorems. As a conclusion we suggest the need of using them from an early age in order to form correct intuitions that will then be applied throughout training in probability and combinatorics.
Keywords: *Tree diagram, intuitions, probability, combinatorics.*

1. INTRODUCCIÓN

Asumimos que la principal misión del sistema educativo es la formación integral de las personas para que éstas puedan desenvolverse como ciudadanos con plenos derechos en la sociedad del siglo XXI. Ellos se verán obligados a tomar decisiones que afectarán tanto a ellos mismos como, en muchos casos, al resto de la población. Para llevar a cabo esta labor, es absolutamente necesario que los estudiantes adquieran una serie de conocimientos y habilidades que les permitan afrontar, de una forma razonada y crítica, la toma de decisiones basadas en argumentos sólidos, lo más científicos posible y teniendo en cuenta el contexto en el que se toman.

En este sentido, el sistema educativo resalta la formación en aspectos lingüísticos y matemáticos como base fundamental para tener éxito en las demás áreas de conocimiento: comunicar, comprender y abstraer son competencias esenciales en la formación de los individuos. Nuestro interés se centra en este momento en las capacidades matemáticas que debemos adquirir para hacer frente a cuestiones de tipo social, cívico e incluso ético. La formación del ciudadano en matemáticas comienza incluso antes de que se matricule en el primer curso de Educación Primaria, pues no solo se trabajan contenidos matemáticos en la Educación Infantil, sino que las familias otorgan una gran importancia a que el niño comience a distinguir números y operaciones básicas (suma y resta) cuanto antes mejor. Desarrollar estas capacidades en la etapa más temprana es considerado símbolo de inteligencia y de un futuro próspero.

Durante la Educación Primaria, el alumnado aprende de una manera informal, dando significado a los contenidos matemáticos basándose especialmente en sus intuiciones. La enseñanza y el aprendizaje de los números y de la geometría están indisolublemente vinculados a las experiencias vividas por el alumnado, que le son cercanas y que puede repetir en su ambiente familiar. Con el paso de los cursos se va adquiriendo un mayor grado de profundización en los diferentes conceptos y procedimientos que otorgan al alumnado la capacidad de resolver situaciones problemáticas, especialmente si se corresponden con situaciones reales en contextos muy próximos.

El bloque curricular sobre Estadística y Probabilidad (MECD, 2015) está especialmente orientado a un aprendizaje mediante procedimientos heurísticos en los que la intuición es incluso más necesaria que las herramientas algebraicas. La habilidad para reconocer los fenómenos aleatorios y prever sus posibles resultados está más relacionada con las experiencias personales y con la capacidad lingüística de expresión que con contenidos puramente matemáticos. En este sentido, durante toda la etapa primaria se trabajan técnicas de enseñanza y aprendizaje que, a pesar de que puedan parecer básicas por su simplicidad, serán las que conformen después el razonamiento matemático y probabilístico en edades más avanzadas.

En el presente artículo desarrollamos un análisis de las posibilidades que ofrecen los diagramas de árbol dentro de la Educación Primaria y Secundaria para la formación del ciudadano, especialmente en el ámbito de la combinatoria y la probabilidad, y describiremos su importancia en la hora de aplicar, sin necesidad de fórmulas, teoremas notables de probabilidad (que luego aparecen en las pruebas de acceso y/o admisión a la universidad). Comenzamos con unas consideraciones generales y un resumen de la investigación didáctica relacionada.

2. EL DIAGRAMA DE ÁRBOL

El tipo de representación utilizado para resolver problemas influye en el modo en que se organiza e interpreta la información dada en el enunciado (Kolloffel, Eysink, de Jong y Wilhelm, 2009). El valor de la representación depende de su poder informacional y computacional; el primero se mide por la cantidad y tipo de información que permite representar y el segundo por la forma de ayudar a operar con la misma. En este sentido, los diagramas de árbol juegan un papel importante en la planificación y el desarrollo de tareas matemáticas escolares.

En general, un diagrama de árbol es un grafo (orientado o no) con la propiedad de que cualesquiera dos de sus distintos vértices están conectados por un único camino simple. Para fines educativos, nos basta con considerar diagramas de árbol con un número finito de vértices y lados, que siempre se pueden representar en el plano (véase la Figura 1).

En concreto, consideraremos diagramas de árbol que nacen de una *raíz* (o *tronco*) de la que salen diferentes caminos (en nuestro caso, un número finito de ellas), denominadas *ramas de primera generación*. Estas ramas deben representar todas las posibilidades que pueden aparecer en la primera fase de la construcción del diagrama (por ejemplo, de un juego o experimento que se trata de representar), y terminan en vértices del grafo denominados *nudos* (o *nodos*, o *vértices*). A su vez, de estos nudos pueden nacer nuevas ramas, denominadas *ramas de segunda generación*, que vuelven a terminar en nuevos nudos. Tras un número finito de fases, se llega a *nudos terminales*, de los que ya no salen más ramas, los cuales representan el final del fenómeno representado (pudiendo el árbol volver a repetirse desde la raíz).

La ventaja principal de los diagramas de árbol, que pueden usarse también fuera del ámbito matemático, es su capacidad para transmitir mucha información, ordenada y clasificada, con un simple *golpe de vista.* Por ello, permite una visión rápida y de conjunto del hecho estudiado, teniendo en cuenta todas sus posibilidades. Así, en la toma de decisiones, ayuda a discriminar las causas primarias o secundarias que afectan al comportamiento global del sistema, para analizar su posible evolución y elegir la mejor decisión. Igualmente, en la resolución de un

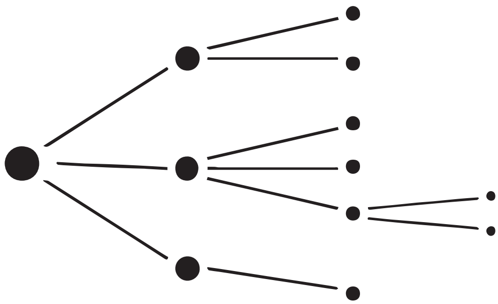

Figura 1. Ejemplo de diagrama de árbol.

problema, ayuda a todos los componentes del grupo de trabajo a entender cuál es su labor dentro del cometido global, colaborando en el desarrollo eficiente de la tarea.

En este trabajo mostraremos que, en la enseñanza de las matemáticas, los diagramas de árbol son especialmente útiles en el estudio de la combinatoria y de la probabilidad. Previamente resumimos algunas investigaciones didácticas centradas en el uso de este recurso.

3. INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE EL DIAGRAMA DE ÁRBOL

Uno de los primeros autores que se preocupó por el diagrama de árbol fue Fischbein (1975), quien lo consideró como un recurso importante en la resolución de problemas de combinatoria. El autor sostuvo que las estructuras matemáticas pueden representarse no solo de forma simbólica, sino también icónica y enactiva, sin cambiar, por ello, las características esenciales de dicha estructura, y que el uso de métodos adecuados de representación facilita y acelera el tránsito desde un nivel de conocimiento hacia otro nivel superior. Entre las representaciones gráficas destaca el diagrama de árbol, al que Fischbein considera un modelo generativo, en cuanto que sugiere y facilita una generalización iterativa (problemas sucesivos con un mayor número de elementos cada vez) y una generalización constructiva (problemas derivados del inicial), siendo éstas las dos características esenciales del razonamiento recursivo.

Fischbein (1975) concibe las intuiciones como procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones de las personas y que suponen una parte importante de su inteligencia. Sus características de globalidad, inmediatez, facilidad aparente para ser aplicadas en otras situaciones, estructurabilidad y auto-evidencia las hacen difíciles de cambiar, una vez que se adquieren. Pero las intuiciones en matemáticas pueden ser correctas o incorrectas; de ahí la importancia de una formación matemática adecuada para educar las intuiciones que, tanto en el caso de la combinatoria como de la probabilidad, se pueden reforzar con la ayuda del diagrama de árbol.

La enseñanza no dedica demasiado tiempo al aprendizaje del diagrama de árbol. Es por eso que diferentes autores han descrito errores de los estudiantes. Por ejemplo, Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) indican que pocos estudiantes usan espontáneamente este diagrama para resolver problemas combinatorios, y los que lo usan cometen errores o lo interpretan incorrectamente. Roa (2001), en una investigación con estudiantes de matemática, encuentra algunos que dibujan diagramas en los que sobran o faltan ramas, o bien dibujan una parte del diagrama (por ejemplo una de las ramas) tratando luego de generalizar, pero fallan en la generalización o incluso construyen el diagrama solo como complemento, si bien resuelven el problema por medio de fórmulas.

Son muchas las dificultades que puede encontrar el alumnado al enfrentarse a la confección o a la interpretación de un diagrama de árbol: por ejemplo, no considerar una raíz, no describir todas las ramas que salen de cada nudo, creer que de cada nudo debe salir el mismo número de ramas, creer que el experimento siempre termina tras el mismo número de fases, suponer que todos los caminos en todos los experimentos ocurren con la misma asiduidad, no tomar la decisión adecuada en cada nudo sobre el mejor camino a elegir, etc. Otro error, difícil de atajar, es la creencia de que los procesos han de seguir una línea temporal concreta, no teniendo sentido, por ejemplo, determinar la probabilidad de un suceso de la primera fase condicionando a que sabemos lo que ha ocurrido en la segunda etapa. Díaz y de la Fuente (2005) describen esta creencia y la posible influencia que tiene en los errores de los estudiantes al resolver problemas basados en el *teorema de Bayes*.

4. DIAGRAMAS DE ÁRBOL EN LOS DOCUMENTOS CURRICULARES

La importancia de los diagramas de árbol en el desarrollo de diferentes asignaturas a lo largo de las etapas de Educación Primaria y Secundaria se muestra en diferentes documentos curriculares. Dentro de la actual Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, que establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los cita en el Bloque 5 dedicado a estadística y probabilidad (MECD, 2015). Los diagramas en árbol aparecen en diferentes cursos, tanto en los contenidos como en los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la siguiente forma.

Dentro de los contenidos, los diagramas de árbol se consideran, por ejemplo, en 4º de ESO para las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas,* donde identificamos: "Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades"; "Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias" (p. 398). Por otro lado, en las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas* de 4º de ESO encontramos: "Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace. Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol." (p. 407).

Sin embargo, como criterios de evaluación, se consideran desde las *Matemáticas* de 1º y 2º de ESO, donde se incluye el siguiente: "Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos" (p. 413). En las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* de 3º encontramos: "Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos"; "Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la *regla de Laplace* o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento" (p. 394). En la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales* de 2º de Bachillerato, aparecen como criterios de evaluación: "[…] utilizando la *regla de Laplace* en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia" (p. 389). En este curso, suponen uno de los principales recursos educativos en el área de probabilidad. Por ejemplo, veremos más adelante cómo usarlos en ejercicios y problemas en los que se aplica tanto el *teorema de la probabilidad total* como el *teorema de Bayes*, que luego son propuestos sistemáticamente cada año en las pruebas de acceso y/o admisión a la universidad.

Finalmente, en los estándares de aprendizaje evaluables también se incluyen desde el primer curso. Así en las *Matemáticas* de 1º y 2º de ESO, encontramos "Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos", Igualmente se citan como estándares de aprendizaje evaluables en el área de Lengua Castellana y Literatura en los siguientes términos: "Aplica técnicas diversas para planificar sus escritos: esquemas, árboles, mapas conceptuales etc." (p. 361). Los diagramas de árbol también están presentes en las pruebas de acceso a ciclos formativos, especialmente en la familia profesional de Administración y en la de Comercio y Marketing.

En lo que sigue analizamos algunos usos de este diagrama en combinatoria y probabilidad y, en especial, su utilidad para facilitar la comprensión de algunos teoremas notables de probabilidad. Finalizamos con algunas recomendaciones para la enseñanza.

5. DIAGRAMAS DE ÁRBOL EN COMBINATORIA

Aunque, aparentemente, el contenido combinatorio del currículo es limitado, esta impresión es falsa, pues la combinatoria es, en realidad, la base de la matemática discreta y aparece como tal, no solo en probabilidad, sino en aritmética (números factoriales, divisibilidad), muestreo, matrices, determinantes e incluso en investigación operativa (Hadar y Hadass, 1981).

Por ello, los diagramas de árbol se utilizan desde la Educación Primaria en temas relacionados con la enumeración sistemática o el cálculo del número de elementos de un conjunto discreto (sin contar), desde una componente lúdica, haciéndolos intervenir en actividades exploratorias y juegos, entendiendo éstos como un conjunto de acciones, sujetas a ciertas normas o reglas predeterminadas, que se realizan como diversión, pero pueden servir de recurso de aprendizaje. Precisamente Engel, Varga y Walser (1976) ya propusieron una serie de juegos, muchos de ellos basados en el diagrama de árbol, que permiten introducir la combinatoria desde esta etapa educativa.

Las primeras actividades combinatorias basadas en los diagramas de árbol en Educación Primaria son, quizás, aquellas diseñadas para aprender a clasificar objetos según unas cualidades determinadas. Por ejemplo, podemos distinguir entre hombres y mujeres que, a su vez, pueden tener el pelo moreno, castaño, rubio o pelirrojo. En este caso, un sencillo diagrama de árbol sirve para comprender todas las posibilidades de la clasificación, atendiendo a diferentes criterios (sexo y color de pelo), de tal forma que cada uno de los objetos considerados debe pertenecer a uno, y solo a uno, de los posibles caminos considerados desde la raíz hasta un nodo terminal. En otras palabras, la clasificación debe ser exhaustiva y excluyente.

En la Educación Secundaria, los diagramas de árbol se utilizan principalmente en ejercicios y problemas asociados a la construcción de permutaciones, variaciones y combinaciones, ordinarias o con repetición, elaboradas en base a las normas que se hayan prefijado, con la idea de remarcar la estructura multiplicativa de estas situaciones. Por otro lado, son muchos los ejemplos de actividades combinatorias accesibles al alumnado que permiten construir e interpretar diagramas de árbol durante toda su etapa escolar. Describimos algunos de ellos (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994):

- Realizar una enumeración sistemática: detallar todas las posibilidades que pueden ocurrir al lanzar dos o tres monedas o dados, o explicar todas las posibilidades que nos podemos encontrar para el tiempo meteorológico para mañana y pasado mañana (cuando vamos a realizar una excursión).
- Analizar la mejor estrategia en un juego, como en el de *pares o nones*.
- Problema de existencia: ¿existe una forma de organizar una competición donde *n* equipos han de jugar dos contra dos?
- Problemas de optimización: determinar una forma rápida de ordenar un conjunto de números.

En resumen, los diagramas de árbol son esenciales en combinatoria, para comprender cómo han de combinarse una serie de elementos para formar una opción plausible. No obstante, a poco que el número de elementos aumente, suele haber tantas combinaciones (o variaciones) que el cálculo de todas las opciones posibles se dispara. Un ejemplo sencillo, que causa gran impacto entre el alumnado, es la descripción de todas las diferentes formas de vestir de los propios alumnos partiendo de la ropa de que disponen. Por ejemplo, si poseen 7 camisetas y 3 camisas para abrigar el tronco, 6 pantalones para las piernas, unos zapatos y dos calzados deportivos, nos estaríamos encontrando ante $(7 + 3) \cdot 6 \cdot (2 + 1) = 180$ posibilidades distintas de vestir, lo cual es suficiente para ir a clase todos los días durante un curso escolar sin repetir modelo. Todo ello sin contar ropa deportiva para hacer gimnasia, pañuelos, ropa interior, complementos, etc.

En estos casos no es necesario (sería muy engorroso) formar todo el diagrama de árbol. Una estrategia para resolver este problema de forma general consiste en afrontar previamente un caso en el que el número de posibilidades en cada etapa sea menor (no más de dos o tres), y representarlo gráficamente cuando sea asequible (por ejemplo, dibujar el diagrama de árbol para el caso de 3 camisas, 2 pantalones y 2 tipos de calzado). Utilizando este modelo simplificado, facilitamos que el alumnado descubra una fórmula que luego pueda emplearse variando el número de objetos a combinar e incluso variando el contexto, como ocurre en los ejemplos siguientes:

- Si tenemos papeletas con 5 nombres y 7 apellidos, ¿cuántos nombres pueden formarse? (distinguir entre si el nombre llevará uno o dos apellidos, o si se pueden repetir o no los apellidos).
- ¿Cuántos menús diferentes pueden confeccionarse con 5 primeros, 4 segundos y 7 postres?
- Si rifamos dos premios al azar entre todos los alumnos de la clase, ¿cuántas parejas ganadoras puede haber?

6. DIAGRAMAS DE ÁRBOL EN PROBABILIDAD

En el ámbito de la probabilidad, los diagramas de árbol son, sin lugar a duda, una herramienta destacada dentro los procesos de enseñanza y aprendizaje del alumnado. En primer lugar, se utilizan para determinar el espacio muestral, es decir, todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, siendo muy interesante en los experimentos compuestos, que se pueden descomponer en varias fases y que ofrecen un número finito de posibilidades en cada paso.

Por otro lado, aunque a veces la propia construcción del diagrama de árbol ayuda a comprender la estructura del experimento y, por tanto, a resolver los problemas, su utilidad es aún mayor en el cálculo de probabilidades en el contexto de un experimento compuesto (véase Huerta, Edo, Amorós y Arnau, 2016). Por ejemplo, cuando se analizan experimentos aleatorios que ocurren en diferentes etapas de forma consecutiva, los diagramas de árbol nos ayudan a conocer todos los posibles resultados de cada etapa. En este caso, el diagrama suele considerarse *dirigido*, en el sentido de que hay una forma natural de recorrer el árbol, según vayan apareciendo unas u otras opciones en el experimento, lo que se suele indicar en la representación gráfica mediante flechas en vez de segmentos. Éste podría ser el caso si consideramos todas las posibles combinaciones de géneros de cuatro hermanos de la misma familia.

Para formar un diagrama de árbol, los sucesos que pueden ocurrir en la primera etapa de un experimento aleatorio deben formar un *sistema completo de sucesos*, es decir, describir el espacio muestral de forma exhaustiva y excluyente. Sus probabilidades asociadas son simples por contraposición a las probabilidades que se asocian a ramas secundarias, que son probabilidades de sucesos que pueden ocurrir en la segunda etapa condicionadas a sus respectivos sucesos de la primera fase. Dichas probabilidades se suelen escribir junto a las ramas (o flechas) del diagrama de árbol y, en muchas ocasiones, son fracciones que resultan de la aplicación de la *regla de Laplace*. La suma de las probabilidades de las ramas que salen de cada nudo debe ser 1 ya que representan todas las posibilidades de los sucesos que pueden ocurrir tras pasar por ese nudo en dirección a la siguiente fase (véase la figura 2).

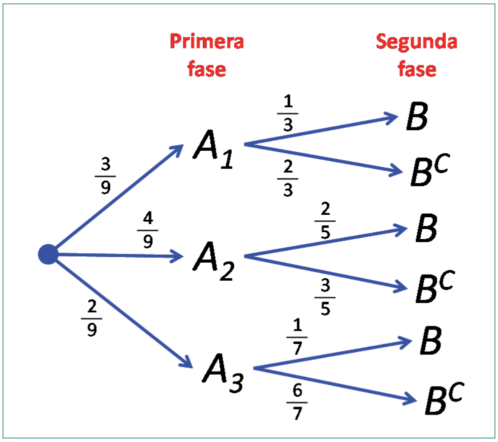

Figura 2. Diagrama de árbol con indicaciones de sus respectivas probabilidades.

En el diagrama de árbol anterior, el espacio muestral del primer experimento está formado por tres sucesos A_1, A_2 y A_3 y en el segundo experimento por dos, B y su complementario. A partir del diagrama, es sencillo calcular probabilidades condicionales como las siguientes.

$$P(B|A_1) = \frac{1}{3}\,,\;\; P(B^C|A_2) = \frac{3}{5} \;\; y \;\; P(B|A_3) = \frac{1}{7}.$$

El suceso que ocurre como conjunción de un suceso de cada fase puede interpretarse como el camino simple que va desde la raíz hasta un nodo terminal pasando por todos los sucesos que conforman la trayectoria. Las probabilidades compuestas de dichos sucesos resultantes de intersecciones pueden ser determinadas multiplicando las respectivas probabilidades del camino que se recorre. Pluvinage (2005) indica que cuando el punto de llegada para una experiencia se toma en cuenta como el de partida para otra posterior, se habla de encadenamiento, donde se aplica la regla del producto. Por ejemplo:

$$P(A_1 \cap B^C) = \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}\,,\;\; P(A_3 \cap B) = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{45}.$$

Los argumentos que apoyan esta regla, necesarios para dar significado al diagrama y relacionarlo con este desarrollo aritmético, están vinculados a su vez con el significado de la fracción como operador, especialmente cuando dicha fracción expresa una razón entre los casos de interés y los casos posibles (*regla de Laplace*). De esta forma, el ejemplo anterior podría leerse de la siguiente forma: «*Si el suceso A_1 ocurre tres de cada nueve veces que repetimos la experiencia (3/9) y, habiendo ocurrido A_1, el suceso B^c ocurre dos de cada tres veces (2/3), entonces en 2/3 de 3/9 de las ocasiones ocurre el suceso compuesto $A_1 \cap B^c$*». Obviamente, desde el punto de vista didáctico, este argumento debe interpretarse aludiendo a los sucesos dentro del contexto del problema, dejando la notación formal para los últimos cursos.

El diagrama mostrado en la Figura 2 se puede continuar añadiendo nuevos experimentos. Por ello, una de las principales ventajas del diagrama de árbol es su carácter recursivo: para construir un árbol de n pasos, basta ampliar el construido con $n - 1$ etapas, y éste parte del de $n - 2$, hasta llegar al nodo original.

Pero la principal bondad de los diagramas de árbol es su enorme capacidad para hacer comprender a quienes los diseñan o interpretan situaciones relativamente complejas de una forma muy sencilla. Por ejemplo, cuando nos hacemos una prueba médica para detectar si tenemos o no una cierta enfermedad, confiamos en que el proceso de detección será fiable al 100%. Sin embargo, esto no es así. Podemos estar sanos y que la prueba diga que tenemos la enfermedad (falsos *positivos*), o podemos estar enfermos y que el test asegure que estamos sanos (falsos *negativos*). En cualquier caso, las pruebas médicas deben incrementar, cada vez más, su *sensibilidad* (probabilidad de dar positivo cuando el paciente tiene la enfermedad) y su *especificidad* (probabilidad de dar negativo cuando el paciente está sano). Esta situación se muestra en la Figura 3.

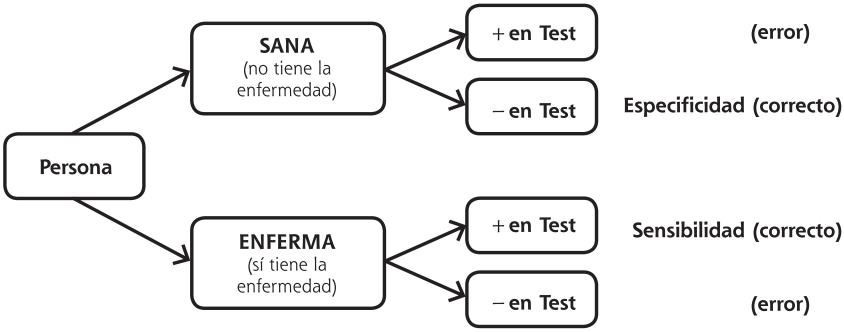

Figura 3: Diagrama de árbol para describir los posibles casos al hacernos una prueba médica.

7. TEOREMAS NOTABLES DE PROBABILIDAD UTILIZANDO DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Si consideramos experimentos con un número pequeño de sucesos en el espacio muestral, es posible utilizar el diagrama de árbol para introducir a los estudiantes en el estudio de teoremas que, de otro modo, serían complejos de justificar. Así, tanto el *teorema de la probabilidad total* como el *teorema de Bayes* permiten una interpretación muy sencilla cuando se ha confeccionado un diagrama de árbol (Martín-Pliego y Ruiz-Maya, 2010).

De esta forma, un diagrama de árbol con dos fases (como el de la Figura 2) nos ayuda a interpretar el *teorema de la probabilidad total* como una herramienta adecuada para calcular la probabilidad de un suceso de la segunda fase, sin hacer mención a lo que pudo ocurrir en la primera. De esta forma, solo hay que recorrer todos los caminos que llevan a ese suceso, y sumar los respectivos productos de las probabilidades que se encuentran en dichos caminos. Por ejemplo, a partir de la Figura 4, podemos calcular la probabilidad del suceso B resaltando todos los caminos que llevan a dicho suceso (véase la Figura 4). Por consiguiente, la probabilidad del suceso B se obtiene haciendo el siguiente cálculo:

$$P(B) = \frac{3}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7} = \frac{3}{9} + \frac{8}{45} + \frac{2}{63} = \frac{101}{315}.$$

Cuando el alumnado es capaz de comprender este sencillo e intuitivo método, relacionando el significado de cada uno de los sumandos con las correspondientes ramas del árbol y su significado dentro del contexto, resulta más sencillo que, más adelante, sea capaz de generalizar este resultado de manera formal, con la conocida expresión:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3),$$

la cual, posteriormente, se puede generalizar todavía más empleando cualquier número de sucesos en cada etapa y variando las probabilidades que intervienen.

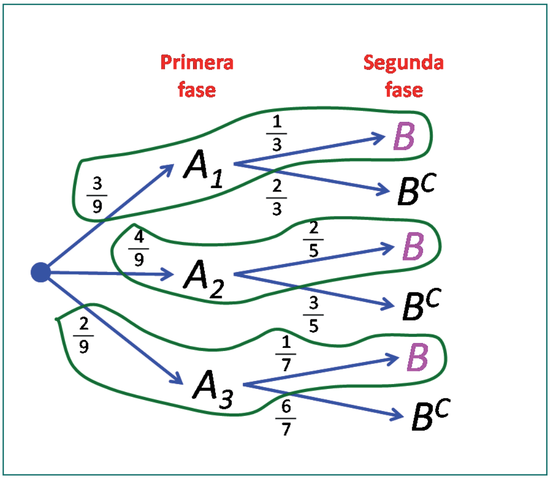

Figura 4. Diagrama de árbol resaltando los caminos que llegan al suceso.

El *teorema de Bayes* puede resultar un poco extraño a primera vista, ya que en él se nos solicita calcular la probabilidad de un suceso que pudo ocurrir en la primera fase del experimento cuando sabemos lo que ha ocurrido en la segunda fase. Esto choca con la intuición inicial de los estudiantes, pues asocian el condicionamiento de sucesos con la causalidad y, además, suponen que no puede condicionarse un suceso a otro que ocurre con posterioridad (Díaz y de la Fuente, 2005). Matemáticamente, sin embargo, el orden temporal es irrelevante para el condicionamiento pero, intuitivamente, hay diferencia en la comprensión, aspecto que es el origen de diversos sesgos de razonamiento.

Así, en el *teorema de Bayes* sabemos lo que ocurrió en la segunda fase, pero desconocemos lo que ocurrió en la primera y, por ello, nos planteamos calcular la probabilidad de que ocurriese ese suceso con la información disponible. Pongamos como ejemplo que tenemos fiebre, pero no sabemos si la causa es gripe u otra enfermedad. Aquí, las probabilidades que nos interesa conocer son del tipo:

$$P(A_i|B),$$

es decir, ¿qué probabilidad tengo de tener gripe si tengo fiebre? Para ello, hay que conocer las probabilidades $P\,(A_i)$ que se denominan, en este contexto, *probabilidades a priori*, y las condicionales $P\,(B \mid A_i)$, que se denominan *verosimilitud*es de que ocurra el suceso B sabiendo que ha ocurrido el suceso A_i. Las probabilidades $P\,(A_i \mid B)$ se denominan *probabilidades a posteriori*. Para obtenerlas, el *teorema de Bayes* puede interpretarse, intuitivamente, de la siguiente forma, calculando el siguiente cociente:

- En el denominador se escribirá la probabilidad del suceso B (al que se condiciona), obteniéndolo como en el *teorema de la probabilidad total* (buscando todos los caminos que llevan al suceso B de la segunda fase y sumando todos los productos de verisimilitudes y probabilidades a priori);

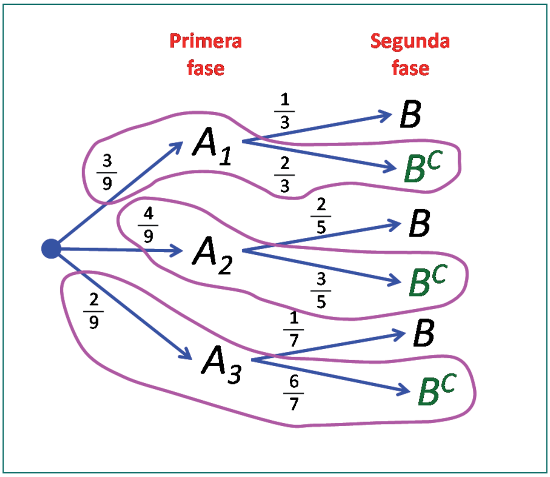

Figura 5. Diagrama de árbol que facilita la aplicación del teorema de Bayes.

- En el numerador se escribirá el único sumando del denominador que corresponde, a la vez, a los dos sucesos considerados (uno de la primera fase y otro de la segunda).

Por ejemplo, utilizando el árbol de la Figura 5, la probabilidad de que haya ocurrido el suceso A_2, condicionando al suceso B^c, se obtiene de la siguiente forma:

$$P(A_2|B^C) = \frac{\text{único camino que pasa por } A_2 \text{ y } B^C}{\text{suma de todos los caminos que llevan a } B^C}$$

$$= \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{7}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{9}+\frac{4}{15}+\frac{4}{21}} = \frac{4}{15}:\frac{214}{315} = \frac{42}{107}.$$

Es importante resaltar que en el denominador se escriben todos los caminos que llegan a B^c, mientras que en el numerador se considera un único camino de los que hay en el denominador. Toda vez que el alumnado ha comprendido este proceso, muy posiblemente sea capaz de comprender su justificación teórica del teorema y, también, su expresión algebraica, a saber:

$$P(A_2|B^C) = \frac{P(A_2)\cdot P(B^C|A_2)}{P(A_1)\cdot P(B^C|A_1) + P(A_2)\cdot P(B^C|A_2) + P(A_3)\cdot P(B^C|A_3)}$$

$$= \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{7}} = \cdots = \frac{42}{107}.$$

Concluimos este estudio aportando una nueva perspectiva desde la cual se puede introducir al alumnado en el estudio de los teoremas de la *probabilidad total* y de *Bayes*. Consideremos un contexto adecuado para aplicar el *teorema de Bayes*, como puede ser el descrito en la Figura 2. En la primera fase del experimento solo pueden ocurrir, de forma excluyente, los sucesos A_1, A_2 y A_3, mientras que en la segunda etapa estamos considerando el suceso B y su complementario. Como hemos comentado antes, en estas condiciones, las probabilidades iniciales $P(A_i)$ se denominan *probabilidades a priori*, mientras que las probabilidades $P(B \mid A_i)$ y $P(B^C \mid A_i)$ de los sucesos de la segunda fase condicionadas a sus respectivos sucesos de la primera fase se denominan *verosimilitudes*. Teniendo en cuenta el contexto en el que nos encontramos, es interesante plantear al alumnado la existencia del árbol "inverso" del árbol considerado en la Figura 2: en este árbol "inverso", los sucesos de la segunda fase del diagrama de árbol original se corresponden con los sucesos de la primera fase del diagrama de árbol "inverso", y viceversa (véase la Figura 6).

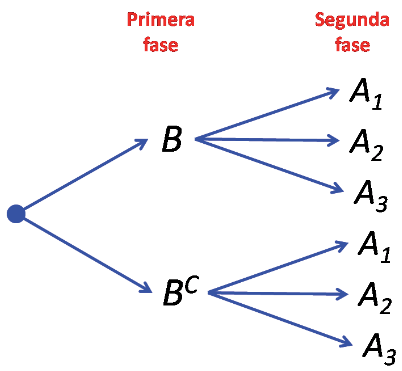

Figura 6. Diagrama de árbol "inverso" del diagrama de la Figura 2.

De esta forma, si deseamos completar el árbol "inverso" con sus respectivas probabilidades, podemos interpretar que el *teorema de la probabilidad total* nos permite calcular las *probabilidades a priori* $P(B)$ y $P(B^C)$ del árbol "inverso", mientras que el *teorema de Bayes* es la herramienta más adecuada para determinar las *verosimilitudes* $P(A_i \mid B^C)$ del árbol "inverso". Utilizando este nuevo punto de vista, podemos contrarrestar el sesgo que produce la línea temporal en el alumnado, observando que cada árbol como el de la Figura 2 posee un árbol "inverso" asociado.

CONCLUSIONES

Las principales ventajas de los diagramas de árbol pueden resumirse en tres características esenciales: provocan un gran impacto visual en la persona que los observa, describen de una forma sintética y estructurada el fenómeno al que se refieren, y permiten ir de lo abstracto a lo particular atendiendo a los factores que influyen en el proceso.

En resumen, los diagramas de árbol constituyen una de las principales herramientas de representación y de deducción en el ámbito de la probabilidad y de la combinatoria. El alumnado aprende a confeccionarlos e interpretarlos mediante la propia experimentación, y los procesos intuitivos que desarrolle en las edades más tempranas servirán, durante toda su vida, para razonar y argumentar en contextos que se presten a ser analizados mediante diagramas de árbol. Es por ello que, en nuestra opinión, debería incrementarse el tiempo dedicado en clase al planteamiento de situaciones problemáticas que puedan afrontarse mediante diferentes técnicas de resolución, siendo una de las posibles el diagrama de árbol. Esto permitiría al alumnado contrastar las bondades y las deficiencias de los diagramas de árbol frente a otros procedimientos de resolución.

Para evitar que la aplicación de los diagramas de árbol se reduzca a un mero procedimiento, es necesario incidir en los argumentos que permiten elaborar para justificar las operaciones a realizar, facilitando la dotación de significado a los términos de las expresiones aritméticas para el cálculo de la probabilidad en relación con el contexto. De esta manera, se aumenta la idoneidad didáctica o grado de adecuación del proceso de enseñanza y aprendizaje (Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone, 2018).

Actualmente, el alumnado no aprende a confeccionar o a interpretar diagramas de árbol mediante la aplicación de técnicas sistemáticas de enseñanza y aprendizaje, sino mediante heurísticos que va contrastando a través de su propia experiencia. En este sentido, es muy importante que el docente ofrezca al alumnado suficientes oportunidades de aprendizaje para que, después, este último sea capaz de desenvolverse con soltura a la hora de analizar las diferentes posibilidades de un experimento y sus respectivas probabilidades. A nuestro entender, las capacidades adquiridas por el alumnado en sus edades más tempranas para diseñar e interpretar diagramas de árbol serán las que luego ponga en juego el resto de su vida. En este sentido, las intuiciones que se hayan adquirido durante la Educación Primaria serán cruciales durante el resto de la formación. Es más, como hemos puesto de manifiesto, estas intuiciones son suficientes, en muchos casos, para superar con éxito las pruebas de acceso a la universidad sin necesidad de aplicar complicadas fórmulas.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupos de Investigación FQM-126, FQM-268 (Junta de Andalucía) y S36_17D (Diputación General de Aragón).

REFERENCIAS

Batanero, C., Godino, J.D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181-199.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 526-548.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, *59*, 245-260.

Engel, A., Varga, T. y Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie: jeux de combinatoire, de probabilités et de statistiques*. OCDL-Office Central de Librairie.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Hadar, N. y Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 435-443.

Huerta, M., I. Edo., P., Amorós, R. y Arnau, J. (2016). Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(3), 335-362.

Kolloffel, B., Eysink, T. H., de Jong, T. y Wilhelm, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatorics from an interactive computer simulation. *Instructional Science*, *37*(6), 503-517.

Martín-Pliego, F.J. y Ruiz-Maya, L. (2010). *Fundamentos de probabilidad* (2ª ed.). Madrid: Paraninfo.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor

Pluvinage, F. (2005). Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(1), 91-99.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.