VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

COMPETENCIA DE ANÁLISIS EPISTÉMICO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD DE FUTUROS PROFESORES

María Burgos, Juan D. Godino, Belén Giacomone, Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Granada, Universidad de Zaragoza. (España)
mariaburgos@ugr.es, jgodino@ugr.es, belen.giacomone@gmail.com, pbeltran@unizar.es

Resumen

En el marco de una investigación de diseño, basada en el modelo ontosemiótico de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor, se presentan los resultados obtenidos sobre la evaluación de la competencia de análisis epistémico de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Se trata de una investigación cuyo objetivo es desarrollar la competencia de análisis de prácticas, objetos y procesos de interpretación, utilizando tareas que implican la noción de proporcionalidad. Los resultados revelan la complejidad que implica el logro de esta competencia, siendo, no obstante, un factor clave para que el profesor de matemáticas tome conciencia de los conflictos de aprendizaje y de los conocimientos que se deben gestionar en los procesos de institucionalización.

Palabras claves: proporcionalidad, formación de profesores, análisis epistémico, enfoque Ontosemiótico

Abstract

In the framework of a designed-based research, based on the onto-semiotic approach to mathematics teacher's knowledge and competences, the results obtained about the assessment of the epistemic analysis capabilities of high school prospective mathematics teachers are presented. The main goal is to develop the competence analysis of practices, objects and interpretation processes, by using tasks that involve the concept of proportionality. The results reveal the complexity for prospective mathematics teachers to attain this competence, which is, however, a key factor for the teacher to be aware on the students' learning conflicts and to build the knowledge needed in institutionalization procedures.

Keywords: Proportionality, teacher education, epistemic analysis, onto-semiotic approach

Introducción

Diversos autores interesados por la investigación en educación matemática se han centrado en el desarrollo de estrategias para promover la reflexión del profesor sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Husu, Toom y Patrikainen, 2008). Así mismo, se interesan por elaborar herramientas que permitan al profesor ser competente para realizar análisis detallados de los sistemas de prácticas matemáticas requeridos para la solución de tareas y situaciones-problemas (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2016; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016).

Por otro lado, el estudio de las razones, proporciones y la proporcionalidad es un campo ampliamente investigado en educación matemática (Obando, Vasco y Arboleda, 2014) siendo un tópico decisivo en el currículo escolar que se inicia en educación primaria (donde se introduce el uso de la regla de tres en situaciones cotidianas de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad) y continúa en secundaria; no obstante la literatura muestra pocas conexiones entre ellos en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Lundberg, 2011) como así también, deficiencias en la formación de profesores respecto a este tópico (Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent y Carrillo, 2015).

Como señala Wilhelmi (2017) en educación primaria (6-12 años), se recurre en muchas ocasiones a la construcción de tablas para organizar situaciones cotidianas de proporcionalidad, lo que permite resaltar la utilidad de determinar el valor que le corresponde a la unidad (reducción a la unidad). Sin embargo, esta introducción suele ser obviada en el desarrollo de la proporcionalidad en educación secundaria (12-16 años) que contempla casi exclusivamente un uso técnico de la regla de tres o una interpretación funcional a partir de la fórmula de la función lineal.

Diversas investigaciones en el área plantean que la proporcionalidad se puede abordar desde diferentes perspectivas o significados, vinculados a su multitud de contextos de aplicación (científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, etc.) (Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino, 2017; Flores, 2011). Esto conlleva la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas asociados. Es claro, por tanto, que, la formación de profesores debe tener en cuenta el desarrollo de conocimientos y competencias matemáticas y didácticas en relación a este tema, mediante intervenciones formativas específicas. En este sentido, la literatura pone de manifiesto que, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad, centrando la atención en lograr en sus estudiantes una comprensión operacional y sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual (razonamiento proporcional) (Buforn, Fernández y Llinares, 2017; Lamon, 2007).

En este trabajo centramos la atención en evaluar el logro de la competencia de análisis de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver problemas, y los objetos y procesos implicados en las mismas, en futuros profesores de secundaria, utilizando una tarea de proporcionalidad.

Marco teórico

Se describe parte de una experiencia formativa en la que analizamos los conocimientos matemáticos específicos de futuros profesores y el nivel de competencia de análisis de objetos y procesos matemáticos, relativos a una tarea de proporcionalidad. Nos hemos basado para ello en el modelo CCDM de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas propuesto por Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) y en las investigaciones realizadas sobre análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas (Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, 2016).

El modelo CCDM se apoya en el sistema de herramientas de análisis desarrolladas en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). Considera que el futuro profesor debe tener los conocimientos necesarios para reconocer, por un lado los diversos significados (entendidos como sistemas de prácticas) del contenido correspondiente y su interconexión, y por otro la diversidad de objetos y procesos implicados (configuración ontosemiótica) para los diversos significados. Así pues, la competencia de análisis epistémico permite al profesor reconocer los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas institucionales necesarias para la resolución de las situaciones-problemas.

En el marco del EOS, los tipos de objetos que intervienen en las prácticas matemáticas se clasifican, según su naturaleza y función en las siguientes seis categorías:

- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones, como, recta, punto, número, media, función).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

El análisis de la actividad matemática con las herramientas del EOS consiste en el reconocimiento de los tipos de objetos que intervienen en las prácticas matemáticas realizadas en la resolución de problemas, así como de las relaciones que se establecen entre los mismos (procesos de interpretación). Cuando se analizan soluciones previstas desde un punto de vista institucional se describe como análisis epistémico, mientras que si las soluciones son producidas por estudiantes se trata de un análisis cognitivo. En este artículo se pide a los profesores en formación que analicen soluciones 'expertas' (o esperadas) producidas por ellos mismos como referencia del aprendizaje de sus alumnos, por lo que dichos estudiantes realizan un análisis epistémico. Por el contrario, el análisis realizado por los formadores a las soluciones dadas por los estudiantes se considera como un análisis cognitivo.

Método

La experiencia formativa se ha realizado en el marco de un máster de formación de profesores de secundaria (año lectivo 2016-2017), en España, dentro de la asignatura *Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas*. Han participado en el estudio 33 estudiantes. La recogida de información se basa en el análisis de contenido de las respuestas dadas por escrito a una situación-problema de proporcionalidad directa, en la que se solicita realizar el análisis de prácticas (operativas y discursivas), objetos y procesos de interpretación implicados en su resolución (Burgos y Godino, 2017). El problema es el siguiente,

Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Las consignas dadas al futuro profesor sobre este problema fueron:

a) Resolver el problema usando varios métodos.
b) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones. Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver y justificar la solución y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias:

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
...	...

El análisis de los datos está orientado a la identificación de respuestas significativas sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y evaluación de los progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

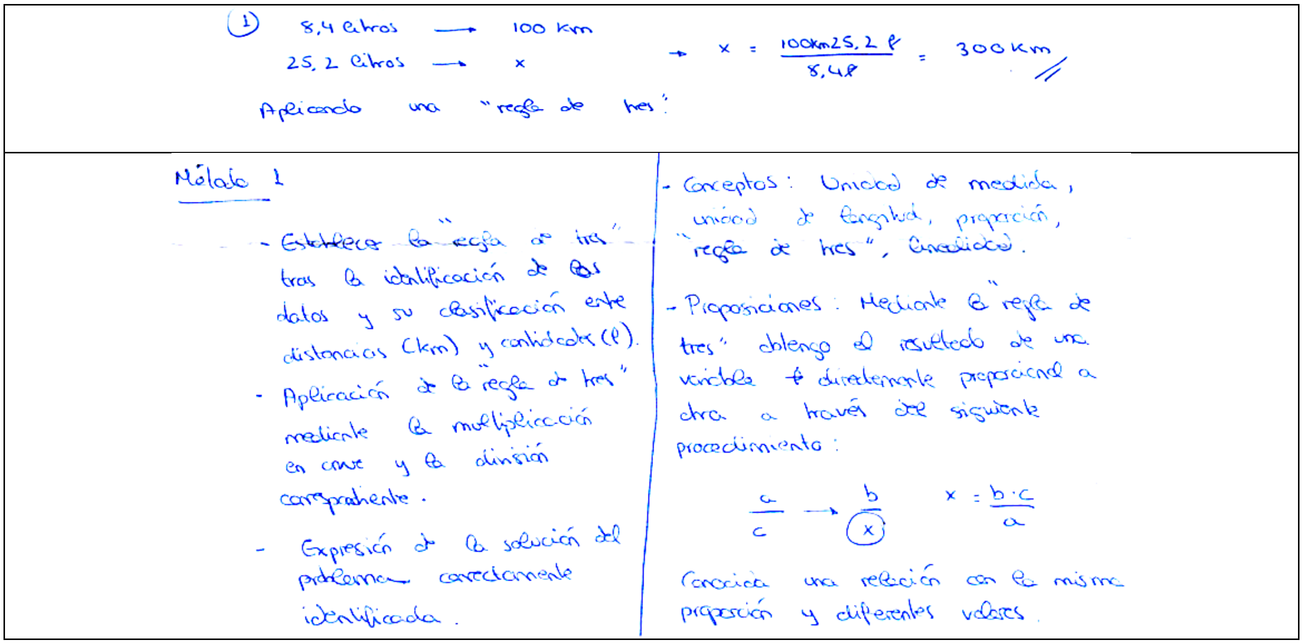
Análisis de resultados

La mayoría de los futuros profesores, 29 de los 33, desarrollaron al menos dos soluciones distintas al problema (24 de ellos elaboraron 3 soluciones diferentes al mismo). Además, casi todos los estudiantes, 27 de 33, realizaron la descomposición en prácticas, como unidades de análisis elementales, de las distintas soluciones propuestas. De ellos, 12 la desarrollaron de forma totalmente correcta; 4 de forma parcial y 11 estudiantes únicamente detallan la intencionalidad de las prácticas.

Un 31,25% de las soluciones propuestas fueron desarrolladas por medio de la regla de tres, de forma habitualmente degenerada, es decir, sin mencionar la serie de números proporcionales implicada en la situación y la igualdad de razones correspondiente. Un 18,75% de los estudiantes elaboraron pertinentemente una solución tabular y finalmente un 14,6 % de las respuestas fueron de carácter funcional.

Los *conceptos* son los objetos que los estudiantes tienen menos dificultad en reconocer. Se identifican multiplicación, división, magnitud, medida, en las soluciones aritméticas propuestas; proporcionalidad, reducción a la unidad, incógnita, significado relacional de la igualdad, o ecuación, en las soluciones proto-algebraicas. Sin embargo, algunos estudiantes consideran *la regla de tres* o *despejar la incógnita en la regla de tres* como un concepto implicado, y no como un procedimiento.

El reconocimiento de las *proposiciones* resulta complicado para los estudiantes, pudiendo estar justificado por el variado perfil académico de los participantes: 19 de ellos no identifican ningún tipo de proposición y 5 incluyen como proposición alguna referida a la regla de tres (qué representa o cómo resolverla). Ejemplos prototípicos de estas respuestas, son: "*la regla de tres representa la relación lineal"; "para resolver una regla de 3 multiplico los números de la diagonal y divido entre el número restante*". Otro ejemplo de la dificultad de reconocimiento de las proposiciones se muestra en la Figura 1.


① 8,4 litros → 100 km
25,2 litros → x → $x = \frac{100km \cdot 25,2\,\ell}{8,4\,\ell} = 300$ km
Aplicando una "regla de tres"

Método 1
- Establece la "regla de tres" tras la identificación de los datos y su clasificación entre distancias (km) y cantidades (ℓ).
- Aplicación de la "regla de tres" mediante la multiplicación en cruz y la división correspondiente.
- Expresión de la solución del problema correctamente identificada.

- Conceptos: Unidad de medida, unidad de longitud, proporción, "regla de tres", cantidad.
- Proposiciones: Mediante la "regla de tres" obtengo el resultado de una variable + directamente proporcional a otra a través del siguiente procedimiento:

$\frac{a}{c} \rightarrow \frac{b}{x}$ $\quad x = \frac{b \cdot c}{a}$

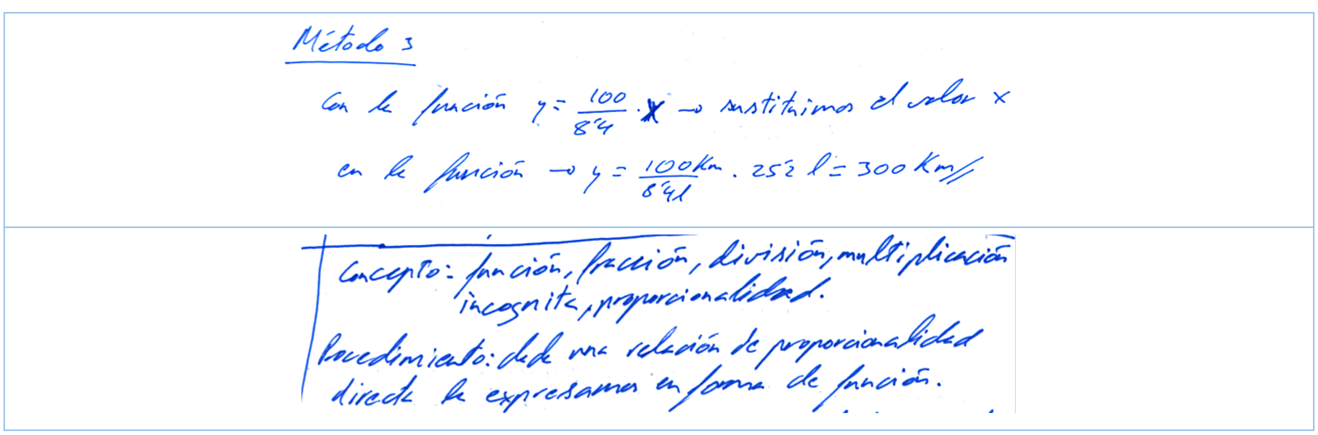
Conocida una relación con la misma proporción y diferentes valores.

Figura 1. Detalle de solución y configuración ontosemiótica de regla de tres

Los demás estudiantes (salvo un alumno que reconoce en cada solución una única proposición, pero de forma pertinente) confunden proposiciones con argumentos o las describen de manera inadecuada.

Los *procedimientos* más identificados son los algorítmicos, mientras que tienen dificultades para reconocer otros tipos, o diferenciarlos de proposiciones y argumentos. Solo una alumna los describe apropiadamente, 19 alumnos no identifican ninguno y 3 alumnos los asimilan a las propias secuencias de prácticas, como una serie de instrucciones operativas o pautas a seguir (Figura 2).

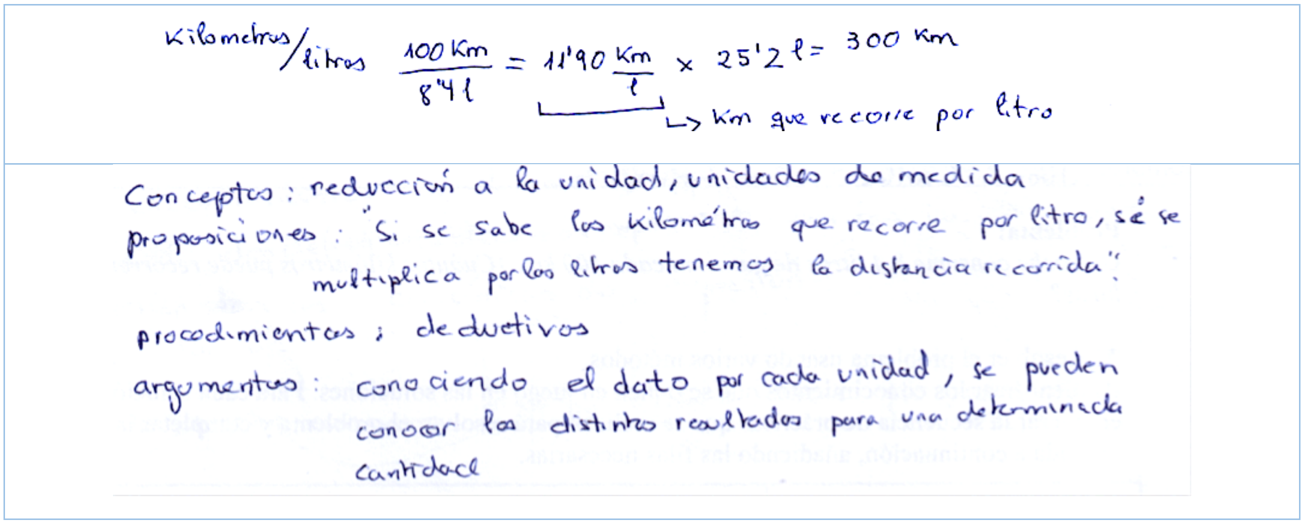
Cuatro estudiantes solo reconocen como procedimientos aquellos que están vinculados de una forma u otra con la regla de tres. Finalmente, 2 estudiantes identifican como procedimientos los aritméticos.


Método 3
Con la función $y = \frac{100}{8'4} \cdot x$ → sustituimos el valor x en la función → $y = \frac{100km}{8'4\ell} \cdot 25'2\,\ell = 300$ km

Concepto: función, fracción, división, multiplicación, incógnita, proporcionalidad.
Procedimiento: dada una relación de proporcionalidad directa la expresamos en forma de función.

Figura 2. Detalle de solución funcional y objetos referidos

Se observan dificultades con los *argumentos*. En este sentido, 24 estudiantes no logran identificarlos y el resto confunde el mismo enunciado con los procedimientos o las proposiciones referidos (Figura 3).


Kilometros/litros $\frac{100\ Km}{8'4\ l} = 11'90\ \frac{Km}{l} \times 25'2\ l = 300\ Km$
↳ km que recorre por litro

Conceptos: reducción a la unidad, unidades de medida
proposiciones: "Si se sabe los kilómetros que recorre por litro, sé se multiplica por los litros tenemos la distancia recorrida".
procedimientos: deductivos
argumentos: conociendo el dato por cada unidad, se pueden conocer los distintos resultados para una determinada cantidad

Figura 3. Detalle de solución por reducción a la unidad y objetos asociados

Estos resultados coinciden con los obtenidos por Giacomone et al. (2016), donde también se observa que la identificación de los conceptos matemáticos resulta menos compleja que el reconocimiento de otros objetos, como las proposiciones. También se ha podido constatar que el uso de la regla de tres se hace con un significado degenerado, ocultando el uso de la proporción; a menudo se considera la *regla de tres* como concepto, proposición, procedimiento o incluso argumento.

Reflexiones finales

El foco de atención de este artículo ha sido el diseño y la implementación de una acción formativa para desarrollar conocimientos y competencia para el análisis epistémico de futuros profesores de matemáticas, particularizado a una tarea de proporcionalidad. El análisis de las soluciones esperadas o expertas de las tareas se debe aplicar también a soluciones dadas por los estudiantes de secundaria (análisis cognitivo). La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas es una competencia que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

Los resultados nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictivas la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados. Este reconocimiento se considera, no obstante, como clave para que los profesores estén capacitados para la implementación de procesos de estudio de las matemáticas que promuevan la competencia matemática de los estudiantes.

En el marco del EOS, además de la competencia de análisis de los sistemas de prácticas, objetos y procesos implicados en la resolución de problemas, se proponen otros tres tipos de análisis claves en la formación de profesores de matemáticas: análisis de las interacciones en el aula, reconocimiento de las normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático y valoración de la idoneidad didáctica de experiencias de enseñanza y aprendizaje (Godino et al, 2017). Será necesario continuar con esta línea de investigación, en lo que respecta al diseño, implementación y evaluación de experiencias formativas, que permitan al futuro profesor iniciarse en el desarrollo de estas cuatro competencias.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad y EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

Referencias bibliográficas

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 175-184). Zaragoza: SEIEM.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 185-194). Zaragoza: SEIEM.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2017). Niveles de algebrización en tareas de proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/posters/burgos.pdf

Flores, R. (2011). Los significados asociados a la nación de fracción en la escuela secundaria. En P. Lestón et al. (Eds.), *ALME* (Vol. 24, pp. 23-31). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 275-284). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2016). Perspectiva ontosemiótica de la visualización espacial y el razonamiento diagramático. En A. Engler, A. Castro et al. (Eds.), *ALME* (Vol. 29, pp. 541-548). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Husu, J., Toom, A. y Patrikainen, S. (2008). Guided reflection as a means to demonstrate and develop student teachers' reflective competencies. *Reflective Practice, 9*(1), 37-51.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 336-345). Rzeszów, Polonia: Universidad de Rzeszów.

Montes, M. A., Contreras, L. C., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, 36-62.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime, 17*(1), 59-81.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime, 19*(1), 71-98.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html