RECONOCIMIENTO DE NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN UNA TAREA DE PROPORCIONALIDAD POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA[1]

Recognizing algebrization levels in a proportionality task by prospective secondary school mathematics teachers

Burgos, M.[a], Giacomone, B.[a], Beltrán-Pellicer, P.[b] y Godino, J.D.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Zaragoza

Resumen

Se realiza el análisis a priori de la resolución de una tarea de proporcionalidad por varios métodos, identificando los conocimientos puestos en juego e identificando los niveles de algebrización implicados. Además, se analizan las respuestas dadas a la tarea por una muestra de 33 estudiantes de un máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria, interpretándolas mediante el análisis a priori realizado. Los resultados indican que los conocimientos y competencias especializadas de los estudiantes sobre proporcionalidad presentan lagunas específicas que pueden dificultar la enseñanza del tema. Como implicación para la formación de profesores, el análisis a priori presentado de la tarea se revela como un instrumento clave, que permite al formador realizar análisis pormenorizados de la actividad matemática escolar e identificar conflictos, potenciales y efectivos, de aprendizaje.

Palabras clave: *formación de profesores, razonamiento proporcional, conocimiento especializado*

Abstract

The a priori analysis of solving a proportionality task by several methods is performed, identifying the knowledge and algebrization levels involved. In addition, the analysis of answers given to the task by a sample of 33 students of a secondary mathematics teachers' master degree is carried out, interpreting them through the a priori analysis performed. The results indicate that students' specialized knowledge and competence on proportionality have specific shortcomings that can make teaching the subject difficult. As an implication for teachers' education, the a priori task analysis presented can be considered as a key instrument, which allows teacher educators to perform detailed analyses of school mathematics activity, and to identify potential and effective learning conflicts.

Keywords: *teacher education, proportional reasoning, specialized knowledge*

INTRODUCCIÓN

El planteamiento de problemas, su solución por diversos métodos y el análisis de los conocimientos puestos en juego en los mismos, forma parte de las competencias profesionales del profesor de matemáticas. En el marco del modelo CCDM (Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos), desarrollado por Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016), los conocimientos y competencias mencionados forman una parte esencial de la facetas epistémica y cognitiva de dicho modelo, ya que permiten al profesor, graduar la complejidad de las tareas que propone a sus estudiantes, comprender los conflictos de aprendizaje y gestionar la institucionalización de los conocimientos.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Sin duda, el trabajo de los profesores es una práctica compleja que requiere una combinación de tipos de conocimientos, competencias y habilidades (Chapman, 2014). Así, desde esta perspectiva, se vienen diseñando, experimentado y evaluando secuencias de problemas, como parte de un proyecto de investigación sobre formación de profesores de matemáticas, con el objetivo de avanzar hacia un profesorado que sea competente en el análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas.

En este trabajo, se informan de los resultados de la fase de evaluación de un proceso formativo específico, focalizado en la resolución de una tarea de proporcionalidad utilizando métodos diversos, seguido del análisis de los conocimientos puestos en juego en cada método y su respectivo reconocimiento de niveles de algebrización (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015), por futuros profesores de matemáticas de secundaria.

A continuación, se presenta el marco teórico, problema de investigación y antecedentes, los cuales justifican la tarea propuesta, seguido del método de investigación en la sección 3. En la sección 4 se muestra un análisis *a priori* de la tarea empleada. En la sección 5 se discuten los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes para profesor. Finalmente, a modo de síntesis, se exponen las conclusiones e implicaciones para la formación de profesores.

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA Y ANTECEDENTES

El desarrollo del razonamiento algebraico debe ser un objetivo a lograr progresivamente desde la Educación Primaria, como proponen diversas investigaciones y orientaciones curriculares. Es necesario que los profesores tengan una visión ampliada del álgebra (Cai y Knuth, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

El modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática propuesto por Godino et al. (2015) puede ayudar a que los profesores conozcan las características del razonamiento algebraico elemental mediante el reconocimiento de los objetos y procesos matemáticos propios del mismo.

Se considera necesario que los profesores aprovechen las oportunidades que ofrecen el currículo y los libros de texto usuales, organizando los contenidos y empleando los recursos adicionales que consideren necesarios para promover el razonamiento algebraico en sus estudiantes, lo cual supone que discriminen la actividad matemática propiamente aritmética de la algebraica, y dentro de la algebraica reconozcan distintos niveles de desarrollo del razonamiento algebraico.

Niveles de razonamiento algebraico

En el marco del EOS se ha propuesto una caracterización del razonamiento algebraico en Educación Primaria basada en la distinción de tres niveles de algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). Tales niveles se definen teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. En Godino et al. (2015), se amplía el modelo anterior mediante la inclusión de otros tres niveles más avanzados de razonamiento algebraico que permiten analizar la actividad matemática en Educación Secundaria. Estos niveles están basados en la consideración de, en primer lugar, el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones; en segundo lugar, el estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades. En los trabajos citados se describen los rasgos característicos de cada uno de los niveles, los cuales son aplicados en esta comunicación al análisis de la actividad matemática que se realiza para resolver una tarea de proporcionalidad directa.

Modelo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor

Como se indican en Godino et al. (2016), en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2012), se ha hecho un esfuerzo por reorganizar las dimensiones, facetas y componentes que caracterizan el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, considerando los aportes teóricos de diversos modelos y proponiendo el denominado modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos. En este trabajo focalizamos la atención en la faceta epistémica del modelo CCDM en la cual se tiene en cuenta el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Sería equivalente a lo que Hill, Ball y Schilling (2008) denominan conocimiento especializado del contenido matemático, aunque desde el EOS es posible distinguir un desglose analítico de sus elementos constituyentes.

En el marco de una investigación de diseño, cuyo objetivo es desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas (Godino et al., 2016), uno de cuyos ciclos se describe en Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco (2016), en este trabajo centramos la atención en evaluar la competencia lograda cuando las tareas propuestas involucran la noción de proporcionalidad e implican el uso de diferentes niveles de algebrización.

El antecedente más próximo de este trabajo es Giacomone et al. (2016) en cuanto a la aplicación de la técnica de análisis de prácticas, objetos y proceso en la resolución de tareas matemáticas. En este trabajo se aplica la herramienta *configuración ontosemiótica* a una tarea de visualización espacial, en el contexto de formación de profesores de secundaria; en nuestro caso la aplicamos a una tarea que implica el uso del razonamiento proporcional. El ejemplo seleccionado permite establecer conexiones entre los diferentes niveles de algebrización, desde el nivel 0 propiamente aritmético, a un primer encuentro con el nivel 4 (introducción de parámetros).

Previamente a la evaluación cuyos resultados se presentan y analizan en este trabajo, los estudiantes fueron instruidos en el modelo de análisis de la actividad matemática mediante el reconocimiento de la secuencia de prácticas, objetos y proceso implicados en la resolución de tareas matemáticas, así como en el modelo de niveles de algebrización.

MÉTODO

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La experiencia formativa se ha realizado en el marco del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2016-2017, en España, dentro de la asignatura *Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas*. Han participado en el estudio 33 estudiantes. La recogida de información se basa en el análisis de contenido de las respuestas dadas por escrito a una actividad en la que se solicita resolver una tarea sobre proporcionalidad, identificar los conocimientos puestos en juego, asignar niveles de razonamiento algebraico implicado en cada solución y enunciar variantes de la tarea que implique diferentes niveles de algebrización. El perfil académico de los estudiantes es variado: solo 12 (33,3 %) tienen el grado de Matemáticas; 15 son Ingenieros de Caminos o Arquitectos (44,1%), 3 son Físicos y 3 proceden de otras Ingenierías. 19 estudiantes declaran que tienen alguna experiencia de enseñanza de matemáticas en clases particulares; el resto no la tienen.

La acción formativa (un taller de dos horas de duración) comprendía tres momentos:

1. Presentación de las características del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática, basados en los trabajos de Godino y colaboradores (Godino et al., 2014; Godino et al., 2015).
2. Trabajando en equipos realizar las siguientes actividades:
    - 2.1. Resolver tareas matemáticas, propias de primaria y secundaria, a ser posible, de varias maneras. (Se propusieron 8 tareas).
    - 2.2. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones.

Instrumento de recogida de datos

La situación-problema planteada a los estudiantes se basa en la resolución del siguiente problema de proporcionalidad directa:

> Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Para este problema se solicitan las siguientes cuestiones:

1. Resolver el problema usando varios métodos.
2. Teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en cada solución reconocer el nivel de algebrización que se realiza en cada caso.
3. Enunciar variantes en el enunciado de la tarea, cuya solución implique cambios en el nivel de algebrización puesto en juego.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA TAREA

Aunque el enunciado inicial del problema se puede resolver mediante un razonamiento aritmético es posible aplicar otros procedimientos que involucran los niveles protoalgebraicos 1 y 2, así como el nivel 3 de algebrización (Burgos y Godino, 2017). Así mismo, se pueden proponer variantes del enunciado inicial de tal manera que supongan un primer encuentro con el uso de parámetros, lo que implica el nivel 4 de algebrización. Aunque la resolución se pueda hacer de una manera esquemática y sintética, se requiere al resolutor la descomposición de la misma en prácticas elementales, según se muestra en las soluciones esperadas que se incluyen a continuación.

Solución 1. Nivel 0 de algebrización: aritmética

1) Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina. Es decir, siempre que recorre 100 km, su consumo en esta distancia es de 8,4 litros.
2) Por tanto, cuando haya recorrido 200 km, el consumo de gasolina será el doble del que ha consumido al recorrer 100 km y cuando haya recorrido 300 km, habrá gastado el triple de gasolina.
3) Si consumió 8,4 litros al recorrer 100 km, consumiría 8,4 × 2 = 16,8 litros al recorrer 200 km y 8,4 × 3 = 25,2 litros al recorrer 300 km.
4) Por tanto, con 25,2 litros puede recorrer 300 km.

Solución 2. Nivel 1 de algebrización: reducción a la unidad

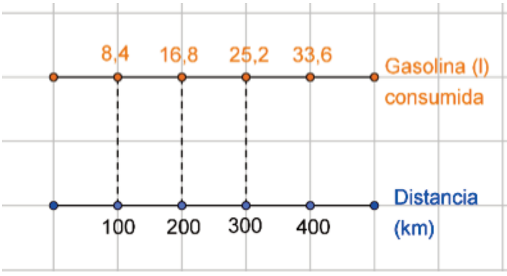
1) Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina.
2) Por lo tanto, la relación entre las magnitudes ‘volumen’ de gasolina consumida y ‘distancia’ recorrida es de proporcionalidad directa.
3) Calculamos primero los kilómetros que recorre el coche por cada litro consumido, dividiendo 100 entre 8,4:

   100/8,4 = 11,904761…, aprox. 11,905

   11,905 son los kilómetros que puede recorrer el coche por litro.
4) Si por cada litro recorre 11,905 km, con 25,2 litros recorrerá, 11,905 × 25,2 = 300 km

Solución 3. Nivel 1 de algebrización: uso de diagramas

En la Figura 1 se recogen 4 tipos de soluciones diagramáticas al problema; por motivos de espacio, no es posible exponer, para cada una de ellas, una secuencia de prácticas discursivas, necesarias para su correcta interpretación.



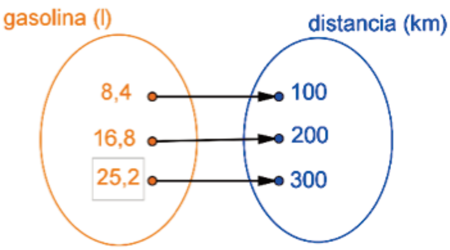
a. Diagrama lineal

+8,4 +8,4 +8,4

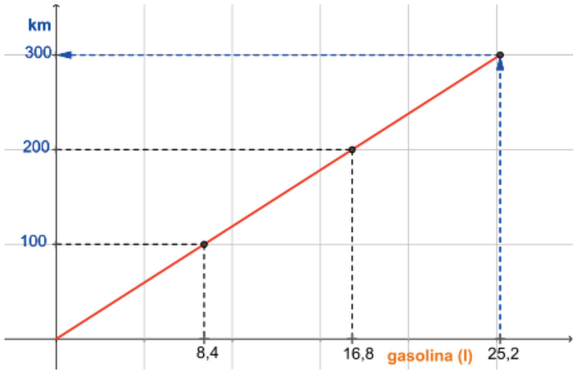
Gasolina (l)	8,5	16,8	25,2	33,6
Distancia (km)	100	200	300	400

+100 +100 +100

b. Diagrama tabula



c. Diagrama sagital



d. Gráfico cartesiano

Figura 1. Representación diagramática de la solución a la tarea

Solución 4. Nivel 2 de algebrización: regla de tres

1) En el enunciado se supone establecida una correspondencia de proporcionalidad directa entre dos magnitudes: 'distancia' recorrida por el coche y 'volumen' de gasolina consumida.
2) Por tanto, la razón de cantidades que se corresponden se mantiene constante:

$$\frac{100\ km}{8{,}4\ l} = \frac{x}{25{,}2\ l}$$

3) Teniendo en cuenta la igualdad del producto en cruz de los términos en una proporción,

$$x = \frac{100\ km \times 25{,}2\ l}{8{,}4\ l} = 300\ l$$

4) Es decir, el coche recorrerá 300 kilómetros con 25,2 litros de gasolina.

Variante 1. Nivel 3 de algebrización

Mi coche y el de mi padre tienen el mismo consumo. El volumen de mi tanque es de 60 litros y el de mi padre es de 82 litros. Si mi padre puede recorrer 220 kilómetros más que yo con su coche antes de volver a repostar, ¿cuál es el consumo de mi coche?

Una solución para esta nueva situación-problema está dada por la siguiente secuencia de prácticas:

1) Se asume una relación de proporcionalidad entre el consumo de combustible y la distancia recorrida.
2) Llamemos x a los kilómetros que puede recorrer mi coche con un litro de combustible.

3) Puesto que la capacidad de mi tanque es de 60 litros, con todo el depósito podré recorrer $60x$ kilómetros.
4) El consumo del coche de mi padre es el mismo que el mío, de modo que, si su tanque tiene una capacidad de 82 litros, hasta volver a repostar podrá recorrer $82x$ kilómetros.
5) Mi padre puede recorrer 220 kilómetros más que yo con su coche, es decir, $82x = 60x + 220$.
6) Luego, $82x - 60x = 220$. De aquí, $(82 - 60)x = 220$, es decir, $22x = 220$, y finalmente $x = 220/22 = 10$ es el número de kilómetros que podemos recorrer con un litro de combustible.
7) Por tanto, el consumo es de 10 litros a los 100 kilómetros.

Variante 2. Nivel 4 de algebrización: generalización; uso de un parámetro

> Un concesionario de coches necesita saber si puede viajar entre diferentes ciudades con una cantidad dada de gasolina, teniendo en cuenta el consumo por cada 100 km. Para facilitar el cálculo quiere encontrar una fórmula que permita calcular los kilómetros que puede recorrer un coche si tiene como dato conocido el consumo por cada 100 kilómetros y la cantidad de gasolina disponible. ¿Cuál sería la fórmula que tendría que utilizar?

La solución a esta nueva variante, implica el nivel de algebrización 4:

Suponemos una correspondencia de proporcionalidad directa entre las cantidades de las magnitudes, distancia recorrida e, y litros de gasolina disponibles, x. Se supone, además, que el consumo es k litros por cada 100 km. Por tanto, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{k}{100} = \frac{x}{y}$$

En consecuencia, la fórmula $y = 100x/k$ expresa los kilómetros que puede recorrer un coche que consume k litros de gasolina cada 100 km con x litros.

RESULTADOS

En la situación de evaluación que se ha planteado a los futuros docentes de secundaria, se espera que éstos resuelvan la tarea y una vez identificados los conocimientos puestos en juego, asignen los niveles de razonamiento algebraico implicados en cada solución aportada. Así mismo, se les pide que enuncien variantes de la tarea que impliquen cambios en los niveles de algebrización.

Esta situación de evaluación de los aprendizajes logrados por los estudiantes fue aplicada tras la fase de instrucción en la que el formador introdujo el tema usando ejemplos para explicar los criterios que delimitan los niveles de algebrización. El modelo de instrucción implementado tiene un carácter dinámico, en el sentido de que las interacciones entre los estudiantes y el formador permitían identificar los conflictos de significados que emergían y su solución dialógica.

De las 8 tareas que se propusieron para su resolución en equipos, y posterior discusión colectiva en clase solo se abordaron 2 en la sesión de trabajo presencial (2 horas de duración). La realización de las otras 6 tareas fue dejada como tarea complementaria que los estudiantes debían realizar en la siguiente semana del curso, enviando la resolución por medio de la plataforma Moodle. El modelo didáctico implementado pretendía mostrar a los estudiantes ejemplos prototípicos del tipo de análisis cuya realización se pretendía promover.

Dadas las limitaciones de espacio no es posible presentar el análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a las 8 tareas propuestas, ni el tipo de institucionalización realizada por el formador. En todo caso se puede afirmar que las dos horas dedicadas a la presentación y discusión del tema en clase fueron insuficientes.

Métodos de solución y niveles de algebrización

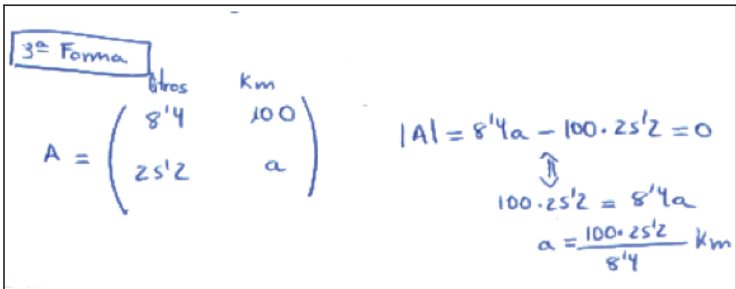
La mayoría de los futuros profesores, concretamente, 24 de los 33, elaboran 3 soluciones distintas al problema. Entre los restantes, 5 estudiantes proporcionan 2 soluciones distintas y solo 4 de ellos presentan 4. En la Tabla 1 incluimos los tipos de soluciones dadas por los estudiantes en formación, el nivel de algebrización de las mismas, número de soluciones de cada tipo facilitadas y en cuántas de ellas el nivel de algebrización fue identificado apropiadamente.

Tabla 1. Tipos de soluciones y niveles de algebrización identificados

Tipos de soluciones	Nivel de algebrización	Número de soluciones		Identificaciones correctas del nivel de algebrización	
		Frecuencia	%	Frecuencia	%
Aritmética	0	13	13,5	10	20,8
Diagramática	1	18	18,8	8	16,7
Reducción a la unidad	1	12	12,5	7	14,6
Regla de tres-Proporcionalidad	2	39	40,6	17	35,4
Algebraico-funcional	3	14	14,6	6	12,5
Totales	–	96	100,0	48	100,0

Las soluciones correspondientes al nivel 2 de algebrización son en su mayoría, un total de 30, desarrolladas por medio de la regla de tres, frecuentemente degenerada, esto es, sin mencionar la serie de números proporcionales implicada en la situación y la igualdad de razones correspondiente, o incorrecta. Esto supone, que casi todos los estudiantes resolvieron el problema por medio de la regla de tres, además de otros métodos. También se incluyen soluciones basadas en el reconocimiento de la relación de proporcionalidad directa bajo la forma de una igualdad entre dos fracciones. Algunos estudiantes plantean como soluciones distintas, *igualdades equivalentes entre dos fracciones* (interpretadas en este caso como razones) que se derivan de la misma proporción entre las magnitudes.

Un estudiante (procedente del grado de Matemáticas) propone una solución sofisticada al problema basada en el reconocimiento de la relación de dependencia lineal entre las magnitudes litros de gasolina consumidos y kilómetros recorridos (Figura 2). Elabora una matriz 2×2, siendo una de sus columnas los litros de gasolina consumidos y la otra la distancia recorrida. La confusión como parámetro del papel de la letra , que interviene como una incógnita, lleva a este estudiante a considerar esa práctica matemática como de nivel 5 de algebrización.



Como ambas variables (litros y kilómetros) son linealmente dependientes, entonces el determinante de la matríz tiene que ser igual a cero, y de esta forma sacamos el valor del parámetro *a*

Figura 2. Procedimiento matricial

Para muchos de los futuros profesores, el nivel de algebrización queda determinado por la aparición o no de variables, a pesar de los ejemplos previamente discutidos en clase. Asocian nivel de algebrización 0 a cualquier actividad en la que no aparezcan los símbolos literales, independientemente del uso que se establezca de ellos, lo cual indica que la formación recibida no ha sido suficiente para superar las ideas previas sobre algebrización, asociada al simbolismo algebraico.

La mayor parte de los estudiantes que facilitaron respuestas diagramáticas en sus diferentes opciones (tabular y gráfica) y que identificaron erróneamente su nivel de algebrización, les asignaron nivel 0, aludiendo a la ausencia de incógnitas (*"no opera con ninguna variable"*), o que la elaboración de las mismas tan solo requiere de operaciones aritméticas (*"simplemente con la suma de números particulares"*, *"va multiplicando litros y distancia por una constante hasta que el número de litros coincide"*). El mismo error aparece cuando los estudiantes resuelven el problema mediante reducción a la unidad y le atribuyen un nivel 0 de algebrización.

Gran parte de los estudiantes que no identificaron adecuadamente el nivel de algebrización en las soluciones por regla de tres o igualdad de razones, le asignaron nivel 1 de algebrización (*"porque se empieza a esbozar un planteamiento algebraico al definir una incógnita 'x' cuyo valor corresponde al número de km que deseamos hallar"*, *"no se opera con elementos algebraicos"*).

Algunos estudiantes obtienen una solución algebraico-funcional, sin razonar cómo obtienen la constante de proporcionalidad (tanto por uno). Otros, no evalúan la función para determinar la solución al problema, sino que recurren a la representación gráfica para determinar la imagen. La mayoría de los estudiantes que no reconocieron apropiadamente el nivel de algebrización en la solución de tipo algebraico-funcional, le asignaron un nivel 2 de algebrización (*"porque utiliza lenguaje simbólico, utiliza ecuaciones de la forma, y trabaja con variables como incógnitas, pero no opera con ellas"*).

No hay una diferencia significativa entre las respuestas dadas por alumnos del grado de Matemáticas y las de aquellos que cursaron otros estudios. Podemos mencionar que tuvieron menos dificultades para identificar correctamente los niveles de algebrización (de las 29 soluciones distintas que proporcionaron dichos alumnos, asignaron correctamente el nivel de algebrización en 20 de ellas).

Enunciado de variantes del problema

Actualmente hay numerosas investigaciones en torno a la creación de problemas de matemáticas con propósitos didácticos y varias de ellas, hacen mención explícita a la vinculación de esta tarea con las competencias docentes (Malaspina, Mallart y Font, 2015; Silver, 2013).

En general, los estudiantes de nuestra muestra tienen dificultades para elaborar variantes del problema inicial. Ocurre que, o bien la tarea que proponen está incompleta o no tiene solución, o bien es un enunciado que nada tiene que ver con el propuesto inicialmente. También en su intento de conseguir un determinado nivel de algebrización, sacrifican la significatividad del enunciado.

Salvo dos estudiantes, todos los demás propusieron variantes al enunciado del problema. De las tareas propuestas, 6 de ellas se alejaban demasiado del contexto inicial y 10 estaban mal planteadas (la solución estaba implícita en el enunciado, carecía de sentido o bien la información que facilitaba el enunciado no permitía responder a la pregunta). En la Tabla 2 resumimos la información relativa a la pertinencia de los enunciados de las variantes propuestas correctamente (15 en total) por los estudiantes.

Tabla 2. Pertinencia de los enunciados de las variantes del problema

Tipo de enunciado	Número de respuestas
Enunciado pertinente	8
Enunciado poco pertinente	3
Enunciado nada pertinente	4
Total	15

(De los 8 enunciados pertinentes, 5 los produjeron estudiantes con el grado de Matemáticas)

Los tipos de problemas propuestos por los estudiantes tienen mayoritariamente tres contextos: a) obtener una expresión general; b) relacionar el consumo de dos marcas de coches; c) relacionar el consumo con velocidades, tiempo o gastos en gasolina.

A la hora de establecer variantes del enunciado inicial que suponga un cambio en el nivel de algebrización, los estudiantes recurren a parámetros para elaborar variantes de un nivel 4 de algebrización (Figura 3).

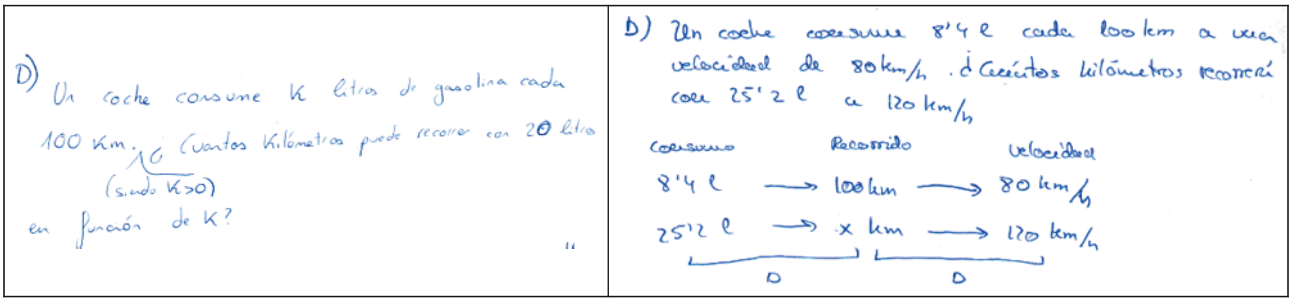


Figura 3. Ejemplos de enunciados variantes de la tarea inicial

Se interpreta que introducir nuevas variables, coeficientes, …, supone un incremento del nivel de algebrización, si bien la solución plantee tareas propias de un nivel de algebrización inferior al pretendido. Se manifiesta la creencia de que una mayor dificultad en la resolución del problema tiene necesariamente asociado un mayor nivel de algebrización. Mencionamos a este respecto el comentario de un estudiante: *"Dado dicho enunciado, se pueden añadir elementos que hagan algo más complejo el análisis y planteamiento, como nuevas variables (tiempo, coste económico). Así pues, el hecho de establecer una relación entre más variables haría subir el nivel de algebrización de la tarea"*.

CONCLUSIONES

El reconocimiento de los distintos niveles de algebrización en la solución de problemas de proporcionalidad que aquí se ha ejemplificado debería ser una competencia del profesor de matemáticas, para que pueda identificar los niveles de complejidad y competencia matemática en los estudiantes de secundaria y promover su desarrollo. También, "la creación de problemas no debe verse como una tarea exclusiva de expertos, ni debe considerarse que los problemas a trabajar en clases sean únicamente los que figuran en los libros o en internet. Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente" (Malaspina, 2017, p. 2).

Hemos constatado que la breve acción formativa implementada sobre el tema es insuficiente para lograr que los estudiantes, sean capaces de descomponer las soluciones en secuencias de prácticas operativas y discursivas para describir y justificar dichas soluciones; que reconozcan de manera pertinente los distintos niveles de algebrización, y que formulen variantes pertinentes de un problema dado. Como afirman Wilhelmi, Godino y Lasa (2014, p. 581) para el caso de la comprensión de las nociones de variable y ecuación por estudiantes similares a los de nuestra muestra,

> no se trata de deficiencias en el nivel de desarrollo cognitivo sino de carencias en el currículo de formación didáctico-matemática de los estudiantes. Estos pueden superar los estudios de grado de matemáticas con estas carencias conceptuales, pero el desempeño como profesores se puede ver seriamente perjudicado si no se complementa con una profundización en la formación epistemológica específica sobre la pluralidad de significados de los objetos matemáticos y las configuraciones de objetos y procesos en los cuales cristalizan tales significados.

Por último, se ha podido constatar que el análisis *a priori* de la tarea implementada con sus posibles soluciones y variantes, ha permitido al profesor del curso, tomar conciencia de las relaciones complejas entre los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, siendo un instrumento clave en el análisis de las respuestas de los estudiantes.

Referencias

Burgos, M. y Godino, J. D. (2017). Niveles de algebrización en tareas de proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/posters/burgos.pdf

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 275-284). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* .
Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). Praga, República Checa.

Silver, E. A. (2013). Problem posing research in mathematics education. Looking back, looking around and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 157-162.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

[1] Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 (MINECO) y EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).