

## CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Carlos Aroza<sup>1</sup>, Pablo Beltrán-Pellicer<sup>2</sup> y Juan D. Godino<sup>1</sup>  
carlosjosearoza@hotmail.com, pbeltran@unizar.es, jgodino@ugr.es

<sup>1</sup>Universidad de Granada, <sup>2</sup>Universidad de Zaragoza, España.

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática.

Modalidad: CB.

Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años).

Palabras clave: proporcionalidad, enseñanza, aprendizaje, idoneidad didáctica.

### Resumen

*En este trabajo se realiza una síntesis de conocimientos didáctico-matemáticos sobre el estudio de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria. Utilizamos como marco teórico la Teoría de la Idoneidad Didáctica, desarrollada dentro del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. El sistema de categorías de facetas y componentes, así como los criterios o indicadores generales de idoneidad que propone dicha teoría, son aplicados para analizar y clasificar los resultados de investigaciones relevantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad y nociones relacionadas. Se propone finalmente un sistema de criterios de idoneidad para la faceta epistémica (conocimientos institucionales) específicos para el estudio del tema. Estos indicadores se pueden utilizar en la formación de profesores, así como para valorar la idoneidad didáctica de recursos y experiencias de enseñanza.*

### 1. Introducción

Si bien no se pueden esperar de las didácticas especiales recetas generales para la enseñanza de los contenidos curriculares que indiquen qué y cómo enseñar en cada circunstancia, es razonable pensar que de los esfuerzos de investigación se deriven resultados que orienten y ayuden a los profesores en las tareas docentes. Este es uno de los supuestos subyacentes de la Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID) (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2013), mediante la cual se propone sistematizar principios, indicadores, criterios o heurísticas, sobre los cuales existe un consenso en la comunidad educativa de un campo específico, cuya aplicación podría ayudar a alcanzar niveles altos de idoneidad de los procesos instruccionales.

En la TID se proponen seis facetas o dimensiones para el análisis de los procesos instruccionales, para los cuales se han identificado criterios de idoneidad generales (Godino, 2013) de aplicación a cualquier contenido matemático. De esta forma, se dispone de una guía general de indicadores de idoneidad (GVID), que puede ser un instrumento de ayuda tanto para el investigador en educación matemática como para el profesor. Ahora bien, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de cada contenido específico (estructuras aditivas, números racionales, geometría, etc.) existen múltiples investigaciones y resultados que aportan criterios específicos para el logro de procesos instruccionales de alta idoneidad. Resulta pertinente, por tanto, la elaboración de guías específicas para los distintos contenidos curriculares, que particularicen y desarrollen la GVID. Este es un objetivo de interés para la investigación didáctica, ya que tales guías específicas pueden ser usadas por los profesores como instrumentos de apoyo para la reflexión sobre la práctica docente

A continuación, se describe el marco teórico junto al problema de investigación y método que se aplican en este trabajo. En la sección 3, se sintetizan los resultados obtenidos del análisis de las investigaciones previas sobre el estudio de la proporcionalidad y nociones asociadas, como razón, proporción, fracción y número racional, desde su iniciación en educación primaria y su continuación en secundaria. Finalmente, a modo de conclusión, se presentan las reflexiones finales en la sección 4. Por razones de espacio, el estudio se limita al análisis de la faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos; es decir, a los significados de los objetos matemáticos en los contextos institucionales de la educación primaria y secundaria.

## **2. Marco teórico, problema de investigación y método**

Esta investigación se ubica en el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), enfoque teórico que vienen desarrollando Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007). El conjunto de nociones teóricas que componen el EOS se clasifican en cinco módulos, cada uno de los cuales permite un análisis parcial y complementario de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas (Godino, 2012): sistema de prácticas, configuraciones de objetos y procesos, trayectorias didácticas, dimensión normativa e idoneidad didáctica. El presente trabajo se centra en aplicar el módulo de la idoneidad.

### **2.1. Teoría de la Idoneidad Didáctica: facetas, componentes y e indicadores**

Godino (2013) señala que la noción de idoneidad es el criterio global de pertinencia o adecuación de un proceso de estudio, cuyo principal indicador empírico es el grado de adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos, y que es relativa a las circunstancias locales en que tiene lugar dicho proceso. Así, la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje se define como la articulación coherente y sistémica de seis dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

La idoneidad permite abordar el análisis de estas facetas, que dada su complejidad no son observables directamente, por lo que es necesario inferir a partir de indicadores empíricos, conformando herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva–explicativa a una didáctica orientada hacia la intervención efectiva en el aula (Godino, 2013). Los indicadores de las idoneidades parciales y de sus interacciones sirven, por tanto, de pauta o guía para la valoración de las acciones planificadas e implementadas, motivando la reflexión y ayudando al profesor en la toma de decisiones.

## **2.2. Problema de investigación y método**

La investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en los niveles primaria y secundaria, y sobre los factores que los condicionan, es muy abundante, como muestran las numerosas publicaciones que se vienen produciendo. Estos trabajos usan marcos teóricos y metodológicos diferentes, produciendo una amplia gama de resultados de diversa naturaleza. Esto puede suponer, en principio, la dificultad de establecer criterios, sobre los cuales pueda existir un consenso para la toma de decisiones en la práctica de la enseñanza de la proporcionalidad. No obstante, parece necesario y razonable asumir el principio de que es posible identificar conocimientos didáctico-matemáticos, resultados de las investigaciones, que ayuden a mejorar los diseños, las intervenciones educativas y la formación de profesores.

En esta investigación se aplica una metodología para realizar la reconstrucción de un significado de referencia para el estudio de la faceta epistémica de la proporcionalidad. La síntesis de criterios de idoneidad para las restantes facetas deberá ser objeto de otros trabajos. Para afrontar esto, se realiza un análisis del contenido de investigaciones claves focalizado en la manera de concebir el propio contenido matemático, la razón, proporción y proporcionalidad, orientado por la herramienta teórica idoneidad didáctica, siendo el objetivo

extraer indicadores específicos de idoneidad epistémica. No se trata de formular reglas generales de actuación, sino heurísticas cuya aplicación requiere tener en cuenta las restricciones del contexto y los recursos disponibles.

El objetivo principal de este trabajo es complementar la GVID propuesta por la TID, con criterios específicos relativos al estudio de la proporcionalidad.

### **3. Resultados**

En este apartado mostramos los principales resultados obtenidos, a partir del análisis y clasificación de información de investigaciones e innovaciones relevantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, desde su primer encuentro en primaria y su continuación en el primer ciclo de secundaria. Usamos la palabra proporcionalidad para referirnos, no solo a las prácticas operativas y discursivas generadas en torno al objeto función lineal, sino también a las nociones relacionadas, como razón, proporción, fracción y número racional (en sus diversos usos y significados), las cuales forman parte sustantiva del campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1994).

Desde una perspectiva epistémica, la proporcionalidad puede ser desarrollada según cuatro enfoques, aproximaciones o significados:

- Intuitiva y cualitativa, centrada en la comparación perceptiva de la semejanza de formas geométricas o en la comparación multiplicativa de los números.
- Geométrica, centrada en las razones y proporciones entre segmentos, semejanza de figuras y escalas.
- Aritmética, centrada en la noción de razón y proporción.
- Algebraica, centrada en la noción de función lineal.

Aunque en estos enfoques se abordan problemas con una estructura matemática similar (relaciones lineales entre variables), se identifican prácticas operativas y discursivas distintas en cada uno y, por tanto, se ponen en juego diferentes configuraciones de objetos, implicando significados diferentes de las razones y de la proporcionalidad. Es importante tener en cuenta esta variedad en el diseño de los procesos de instrucción.

El concepto de razón es complejo y demanda una cierta extensión temporal del proceso de aprendizaje. Así, los diferentes enfoques deberían ser regularmente retomados (currículo en

espiral), siendo esenciales en una primera aproximación los aspectos geométricos y una rica variedad de contextos (Streefland, 1984, p. 338).

### **3.1. Significado intuitivo-informal**

Los tipos de problemas que se pueden abordar con razonamiento pre-proporcional, informal e intuitivo, son los que involucran comparación de razones (Harel, Behr, Post y Lesh, 1992). La aproximación cualitativa, junto con actividades de estimación, juega igualmente una parte importante en la comprensión de las razones y la proporcionalidad. Un ejemplo de tarea es que los estudiantes reconozcan perceptivamente las relaciones proporcionales entre formas de figuras dibujadas a escala (Ruiz y Lupiáñez, 2009). El alumno, antes de saber razonar sobre figuras semejantes, teniendo en cuenta las relaciones cuantitativas entre las razones de segmentos, sabe discernir, por simple percepción, si determinadas figuras están o no en la misma proporción. La propuesta de Fiol y Fortuny (1990, p. 124) es comenzar a partir de experiencias intuitivas de los estudiantes en contextos geométricos y con manipulables.

### **3.2. Significado geométrico (semejanza)**

Tareas relacionadas con las escalas, ampliaciones y reducciones de figuras conservando la forma, como las descritas en Ben-Chain, Keret e Ilany (2012), responden a este enfoque geométrico. Se trata ahora de pasar del estudio cualitativo de la semejanza de las figuras al cuantitativo, teniendo en cuenta las relaciones métricas entre los componentes de las figuras. Actividades como la reproducción de un puzle a escala diferente (Brousseau, 1997, p. 177) lleva a progresar desde el pensamiento aditivo al multiplicativo, propio del razonamiento proporcional, en un contexto geométrico.

Godino y Ruiz (2002) hacen un estudio sistemático de la proporcionalidad geométrica desde el punto de vista de la formación matemática y didáctica de los maestros de educación primaria. Estos autores desarrollan el concepto de las transformaciones semejantes de figuras geométricas introduciendo previamente los conceptos de la razón de segmentos y de los segmentos proporcionales.

### **3.3. Significado aritmético (razón y proporción)**

Godino y Batanero (2003) resaltan la importancia de clarificar los conceptos ligados a la proporcionalidad, en particular las nociones de razón, proporción y las magnitudes proporcionales, además de los conceptos de fracción y número racional. La idea clave es que una razón es un par ordenado de cantidades de magnitudes (homogéneas o heterogéneas), las

cuales son comparadas de manera multiplicativa. Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida. A partir del concepto de razón, se define la proporción como la expresión de igualdad de dos razones. Cuando se prescinde de las unidades de medida de las cantidades correspondientes, una proporción aparece en general bajo la forma de una igualdad entre dos fracciones equivalentes. Este enfoque aritmético del estudio de la proporcionalidad es el que predomina en muchas de las propuestas curriculares, innovaciones e investigaciones (Ben-Chain et al., 2012; Lamon, 2007).

Adjiage y Pluvinage (2007) describen seis situaciones físico-empíricas en las que las razones aparecen como variables de contexto a tener en cuenta: razón de dos cantidades heterogéneas (velocidad, flujo, etc.), medición, mezcla, frecuencia, ampliación y cambio de unidad. Los números racionales que se ponen en juego al modelizar estas situaciones se deben expresar en los registros semióticos de representación de la recta numérica, expresión fraccionaria y decimal, considerando los tratamientos y conversiones entre ellos (Duval, 2006), articulándose dentro y entre los componentes físicos y matemáticos.

### **3.4. Significado algebraico (función)**

Los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado unificado con la noción de función lineal, modelo matemático que sintetiza diversos lenguajes, situaciones y fenómenos. “La función lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de la proporcionalidad” (Fiol y Fortuny, 1990, p. 83). Algunos autores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Obando, Vasco y Arboledas, 2014) enfatizan que el razonamiento proporcional involucra una función lineal en un sistema de dos variables, que permite analizar una situación o un fenómeno al caracterizarlo con una razón constante entre cantidades de magnitudes. Así pues, el modelo matemático es una función de la forma  $y = k \cdot x$ , en el que  $k$  es la razón constante, generalmente conocida como constante de proporcionalidad. La gráfica cartesiana de este tipo de función es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Dado el papel clave que la noción de función desempeña en las matemáticas, se considera que el estudio de la proporcionalidad con un enfoque funcional debería privilegiarse respecto al aritmético.

### **3.5. Síntesis de criterios de idoneidad epistémica**

En la Tabla 1 incluimos criterios de idoneidad epistémica para la proporcionalidad en secundaria inferidos de las publicaciones consultadas, en particular, Ben-Chain et al. (2012), Lamon (2007), Obando et al. (2014), Fernández y Llinares (2012).

Tabla 1: Componentes y criterios de idoneidad epistémica

COMP.	CRITERIOS
<b>Significados y relaciones</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se identifican y desarrollan de una manera organizada los cuatro tipos de enfoques o significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico.</li> <li>- Se establecen conexiones entre los distintos tipos de enfoque de la proporcionalidad mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.</li> <li>- Se aplica la proporcionalidad en contextos no matemáticos como la física, la química, la economía, etc.</li> </ul>
<b>Situaciones-problemas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes, distinguiendo las situaciones que se pueden modelizar de manera lineal de las que no.</li> <li>- Se promueve que el alumno genere problemas de proporcionalidad y porcentajes.</li> </ul>
<b>Lenguaje matemático</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación matemática (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) en los desarrollos conceptuales y procedimentales de resolución de tareas de proporcionalidad y porcentajes, realizando traducciones y conversiones entre los distintos tipos.</li> <li>- Se fomenta que los alumnos manejen y construyan las diferentes expresiones y representaciones matemáticas de la proporcionalidad y porcentajes (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas.</li> <li>- El nivel del lenguaje matemático empleado es el adecuado para los estudiantes del nivel educativo.</li> </ul>
<b>Reglas</b> Definiciones, propiedades y procedimientos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se presentan de manera clara los conceptos y procedimientos fundamentales de la proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente, distinguiendo, razón, tasa, proporción, porcentaje, fracción y número racional.</li> <li>- Se proponen tareas donde los alumnos tienen que reconocer y aplicar definiciones, propiedades y procedimientos de la proporcionalidad y los porcentajes.</li> </ul>
<b>Argumentos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se plantean tareas de proporcionalidad y porcentajes que fomenten la reflexión, el razonamiento y la argumentación por parte del alumno.</li> <li>- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones de los contenidos de proporcionalidad y porcentaje son adecuados para el nivel educativo.</li> </ul>

#### 4. Reflexiones finales

Se ha presentado el proceso de elaboración de los indicadores de idoneidad didáctica para un tema concreto, la proporcionalidad, en educación primaria y secundaria. El sistema de indicadores elaborado, que no se puede considerar como definitivo y cerrado, se está

aplicando como instrumento para apoyar el análisis detallado de la idoneidad didáctica de experiencias de enseñanza (Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer, 2016).

Se han sintetizado los ingredientes de una teoría del aprendizaje de la razón y la proporción: comenzar con problemas genuinos en la realidad de y para los niños como una fuente (para la adquisición del concepto) y como un dominio de aplicación (del contenido aprendido). La realidad visual perceptiva de los niños sirve como comienzo, debiendo hacerse justicia a las diversas manifestaciones de la razón, por lo que el proceso de aprendizaje debería ser diseñado con actividades de anticipación que den cuenta de las conexiones entre ellas, desarrollando esquemas y modelos visuales (Streefland, 1984, p. 92). Esta mirada de la práctica docente tendría que ser una competencia del profesor y ser la base del diseño de acciones formativas pertinentes.

### Referencias bibliográficas

Adjiage, R. y Pluinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 149-175.

Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES*, 6(1).

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publishers.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactic situations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 129-142.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Baeza: SEIEM.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.

Godino, J. D. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Harel, G., Behr, M., Post, T. y Lesh, R. (1992). The blocks task: comparative analyses of the task with other proportion tasks and qualitative reasoning skills of seventh grade children in solving the task. *Cognition and Instruction*, 9(1), 45-96.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 1, pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(1), 59-81.

Ruiz, E. y Lupiáñez, J. L. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7), 1

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, 15(4), 327-348.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En H. Guershon y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). New York, NY: State University of New York Press.