Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad

Pragmatic meanings and onto-semiotic configurations in the study of proportionality

Juan D. Godino[1], Pablo Beltrán-Pellicer[2], María Burgos[1] y Belén Giacomone[1]

[1]Universidad de Granada, [2]Universidad de Zaragoza

Resumen

En este trabajo se clarifican las nociones de significado pragmático y configuración ontosemiótica, describiendo sus relaciones y ligándolas a dos niveles de análisis de la actividad matemática. El primer nivel consiste en el *análisis fenómeno-antropológico*, que se focaliza en la identificación de los fenómenos o situaciones-problemas que constituyen la razón de ser de un objeto matemático, junto con los sistemas de prácticas que se ponen en juego, sus contextos de uso y marcos institucionales. El fin de este análisis es caracterizar la diversidad de significados parciales de un objeto y su articulación en un significado global que sirva de referencia en el diseño y gestión de los procesos de estudio. En segundo lugar, el *análisis ontosemiótico*, focalizado en la identificación de la trama de objetos y relaciones que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problema prototípicas de los significados parciales del objeto. Su finalidad es desvelar la complejidad ontosemiótica de un objeto como factor explicativo de los conflictos y dificultades de aprendizaje. Para contextualizar y clarificar la aplicación de estas herramientas teóricas se aplican al estudio de la proporcionalidad.

Palabras clave: significados pragmáticos, configuración ontosemiótica, proporcionalidad, práctica matemática

Abstract

The aim of this paper is clarifying the notions of pragmatic meaning and onto-semiotic configuration, describing their relationship and presenting them as two analysis levels of mathematical activity. Firstly, the *phenomenological-anthropological* analysis, focused on the identification of phenomena or situations-problems that constitute the mathematical object raison d'être, together with the systems of practices that are put at stake, and concern the contexts of use and institutional frameworks. The purpose of this analysis is to characterize the diversity of an object partial meanings and their articulation in a global meaning that serves as a reference in the design and management of teaching and learning processes. Secondly, the *onto-semiotic analysis*, centred on the identification of the objects and relationships involved in solving prototypical problem-situations for each partial meanings of the object. This analysis tries to reveal the onto-semiotic complexity of an object as an explanatory factor of conflicts and learning difficulties. These theoretical tools are applied to the study of proportionality to contextualise and clarify their utility.

Key words: pragmatic meanings, onto-semiotic configuration, proportionality, mathematical practice

1. Introducción

Dos nociones claves del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) son las de significado (entendido como sistema de prácticas) y configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos. Ambas permiten describir la actividad matemática, tanto desde el punto de vista institucional como personal.

Dado que los sistemas de prácticas que se realizan para resolver cierto tipo de situaciones problemas, en las que interviene un determinado objeto *O* son diversos

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

según los marcos institucionales y contextos de uso, los significados (pragmáticos) del objeto *O* son también diversos. En consecuencia, un objetivo del análisis didáctico-matemático debe ser caracterizar los diversos significados de los objetos y sus interrelaciones, construyendo de esa manera un *significado global* que sirva de referencia para el análisis de los procesos de estudio matemáticos.

Este sería un primer nivel de análisis ontosemiótico de la actividad matemática mediante el cual se toma conciencia de la pluralidad y relatividad de los significados de los objetos matemáticos. En este primer nivel se trata de identificar, clasificar y describir los tipos de situaciones problemas en los que el objeto en cuestión interviene, así como las prácticas matemáticas (operativas, discursivas y normativas) mediante las cuales se da respuesta a dichos problemas. De esta manera, se pasa del objeto matemático, que en un principio viene a ser una 'caja negra', una etiqueta que refiere a una entidad mental, ideal o abstracta, a las prácticas implicadas en el uso de tal objeto. Esto viene a ser una interpretación creativa de la máxima pragmática de Peirce:

> 402. It appears, then, that the rule for attaining the third grade of clearness of apprehension is as follows: Consider what effects, that might conceivably have practical bearings, we conceive the object of our conception to have. Then, our conception of these effects is the whole of our conception of the object[1]. (Peirce, CP 5.402).

Una vez identificado un significado para un objeto matemático, se tiene un tipo de situación problema, que se puede concretar en un ejemplar prototípico y la secuencia de prácticas necesarias para resolverlo. La identificación de la trama de objetos interrelacionados que interviene en dichas prácticas es necesaria para gestionar los procesos de estudio matemáticos y tomar conciencia de la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática como un factor explicativo de las dificultades en dichos procesos. La noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos guía este segundo nivel de análisis didáctico-matemático en el marco del EOS. En este trabajo ejemplificamos el uso articulado de las dos herramientas descritas anteriormente para el caso del objeto matemático 'proporcionalidad'.

2. La noción de significado pragmático

En Godino y Batanero (1994) se introdujeron las nociones primitivas de problema, práctica, objeto y significado. Concretamente se considera práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Dado que un objeto matemático, en su versión institucional se concibe como un "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas" (p. 335), la pregunta por el significado de un objeto se resuelve indicando que es el "sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 338). "Esta noción de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional" (p. 338).

---

[1] "402. Parece, por lo tanto, que la regla para alcanzar el tercer grado de claridad en la comprensión es la siguiente: considerar qué efectos, que naturalmente pueden tener una motivación práctica, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de dichos efectos es nuestra concepción completa de tal objeto". Diversos enunciados e interpretaciones de la máxima pragmática se encuentran disponibles en, https://en.wikipedia.org/wiki/Pragmatic_maxim

Cambiando la institución en que tienen lugar las prácticas, y en ocasiones, cambiando los contextos de uso, se tiene una variedad de significados para un mismo objeto, como se muestra en Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) para el caso de los números naturales y en Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) para la igualdad de números reales.

3. La noción de configuración ontosemiótica

En la resolución de problemas o tareas matemáticas se considera necesario analizar las prácticas matemáticas realizadas con el apoyo de diversos lenguajes, tratando de mostrar las relaciones sinérgicas entre los mismos y los diversos tipos de objetos no ostensivos que necesariamente acompañan a las diversas representaciones.

Para realizar este análisis el EOS ha introducido la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, en la que los diversos tipos de objetos según su naturaleza y función que son clasificados en las siguientes categorías:

- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones, como, recta, punto, número, media, función).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

Estos objetos, considerados como primarios, pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista o polaridades:

1. Objetos ostensivos (materiales, perceptibles) y objetos no ostensivos (abstractos, ideales, inmateriales).
2. Objetos extensivos (particulares), objetos intensivos (generales).
3. Personales (relativos a sujetos individuales), institucionales (compartidos en una institución o comunidad de prácticas).
4. Significantes o significados (antecedentes o consecuentes de una función semiótica).
5. Unitarios (objetos considerados globalmente como un todo) y sistémicos (considerados como sistemas formados por componentes estructurados).

Tanto los objetos primarios como los secundarios (derivados de la aplicación de las dualidades) se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual proporciona criterios para distinguir tipos de procesos matemáticos primarios y secundarios. En consecuencia se tienen procesos de problematización, definición, enunciación, argumentación, particularización-generalización, representación-significación, etc.[2] En la Figura 1 se sintetiza las relaciones entre las herramientas teóricas que propone el EOS para el análisis de la actividad matemática.

[2] Un estudio sistemático de los procesos matemáticos en el marco del EOS se realiza en Font y Rubio (2017).

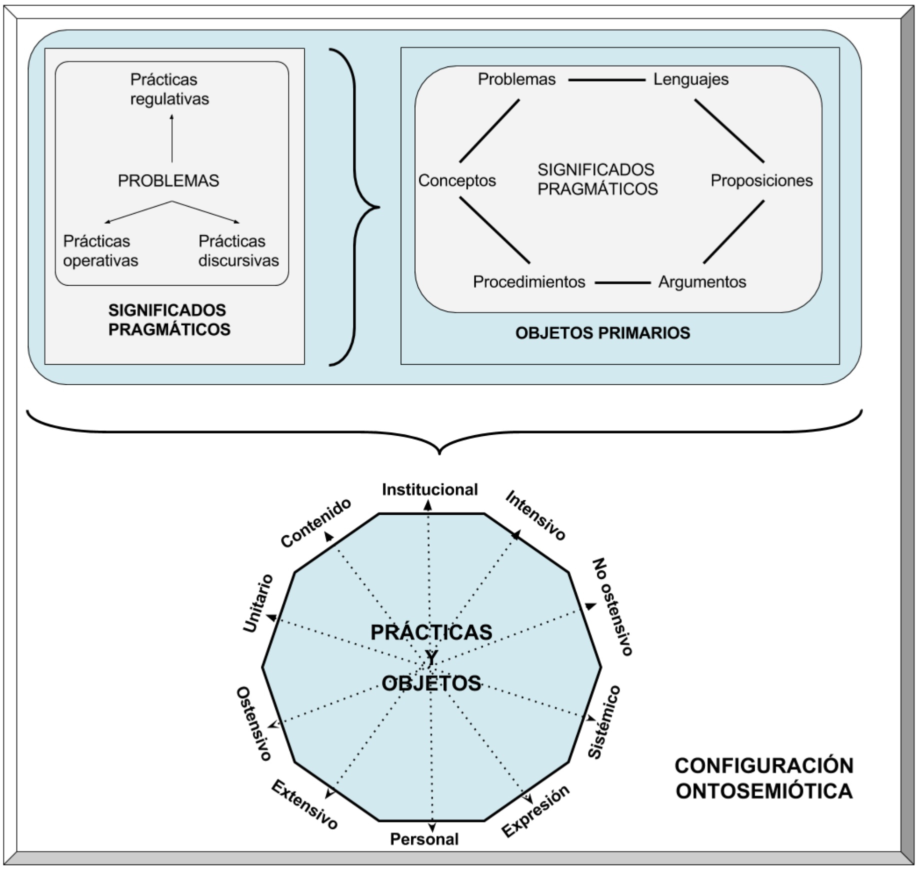


Figura 1. Significados pragmáticos y configuración ontosemiótica[3]

4. El caso de la proporcionalidad

En esta sección aplicamos las herramientas teóricas descritas para analizar diversos significados de la proporcionalidad, distinguiendo los dos niveles mencionados: descripción de significados pragmáticos (sección 4.1) y de configuraciones ontosemióticas asociadas (sección 4.2).

El *universo de significados* de la proporcionalidad se puede clasificar según distintos criterios, en particular, el contexto o campo de aplicación y el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas. Algunos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) conllevan la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes, como revelan las múltiples investigaciones realizadas sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento proporcional (Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Tourniaire y Pulos, 1985). Por ejemplo, en el campo de la probabilidad, entendida en el sentido de Laplace como proporción,

> La comparación de probabilidades implica una comparación de fracciones, pero se añade la dificultad de que también se requieren las ideas de azar, casos favorables y posibles. Los autores que han trabajado el tema sugieren que una tarea de comparación de probabilidades es siempre más difícil que otra tarea de comparación de fracciones en un contexto determinista (Godino y Batanero, 2002, p. 432)

[3] En este diagrama se desglosa la Figura 1 de Godino et al. (2007, p. 132) y Figura 5 de Font et al. (2013, p. 117) con el fin de mostrar con más claridad los distintos niveles de análisis que comportan la descripción de los sistemas de prácticas, objetos y dualidades.

En consecuencia, se pueden delimitar variantes de significados propios de algunos campos de aplicación de la proporcionalidad (geométrico, probabilístico, etc.) y, como veremos en el siguiente apartado, según el nivel de algebrización de la actividad matemática realizada para la resolución de los problemas.

En la solución de los problemas contextualizados de proporcionalidad intervienen magnitudes (longitudes, áreas, volúmenes, velocidades, densidades, etc.) y sus respectivas medidas. En una fase del proceso de resolución las relaciones que se establecen entre las cantidades (razones, proporciones) se expresan usando los valores numéricos de las medidas, se opera con los números reales correspondientes y finalmente se interpreta la solución en términos del contexto. En la fase de modelización intramatemática se ponen en juego los tres significados de la proporcionalidad que describimos en este trabajo, conjuntamente con los significados pragmáticos ligados a los contextos de aplicación. Estos tres significados, junto con el informal/cualitativo, no son exhaustivos ni independientes, siendo posible identificar significados parciales dentro de cada categoría y prácticas matemáticas que involucren a varios de ellos. Es importante tener en cuenta los diversos significados en el diseño de los procesos de instrucción, los cuales deben tener lugar en un dilatado espacio de tiempo (educación primaria y secundaria) y en distintas áreas de contenido, como describe Wilhelmi (2017).

4.1. Significados pragmáticos según los niveles de algebrización

La aplicación de los niveles de algebrización de la actividad matemática propuestos en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad, aporta criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional (RP). Parece razonable y útil para la organización curricular y la gestión de las intervenciones didácticas distinguir tres tipos de significados: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional. Estos tipos de significados se complementan con un significado informal/cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva, por ejemplo, de la semejanza de formas geométricas. Este tipo de significado se moviliza, por ejemplo, en el siguiente problema:

> *Si Nicolás mezcla menos concentrado de limonada con más agua que la que la que prepara habitualmente su mamá, su limonada tendrá un gusto: (a) Más fuerte; (b) Menos fuerte; (c) Exactamente el mismo gusto; (d) La información es insuficiente para dar una respuesta.*

Un análisis informal, puramente cualitativo, de las situaciones de proporcionalidad puede proveer de una estimación que sirva para validar el modo de proceder y el resultado final. Por otro lado, un razonamiento de este tipo se hace necesario, como primer paso, para distinguir si estamos ante una situación de proporcionalidad y si ésta es directa o inversa.

4.1.1. Significado aritmético

Utilizaremos como ejemplo el siguiente problema de valor faltante para mostrar los diversos sistemas de prácticas mediante los cuales se puede abordar su solución:

> *Un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos?*

El significado aritmético se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división), como ocurre en la siguiente secuencia de prácticas:

1. En las situaciones de compra-venta de la vida cotidiana, es habitual suponer que, al comprar cantidades pequeñas de café, dichas cantidades sean del mismo tipo y calidad.
2. En consecuencia, si se compra el doble, el triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Del mismo modo, si se compra la mitad, la tercera parte, etc. de producto, se deberá pagar la mitad, la tercera parte, etc. de precio.
3. Si un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros, el precio de 100 gramos de café (cinco veces menos) debe ser la quinta parte de 5 euros, esto es, 1 euro.
4. El precio de 50 gramos (mitad de 100 gramos) deberá ser la mitad, esto es, 50 céntimos.
5. De esta manera, 450 gramos de café deben costar, $4\times1+0{,}50=4{,}50$; es decir, 4 euros y 50 céntimos.

La práctica 1 tiene un carácter discursivo-descriptivo de la situación-problema, mientras que las restantes tienen carácter normativo y operativo. En la solución intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; por tanto, según Godino et al. (2014), la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de algebrización, puesto que no intervienen objetos y procesos algebraicos.

4.1.2. Significado proto-algebraico

El significado proto-algebraico está centrado en la aplicación de la noción de proporción y la resolución de una ecuación de la forma Ax = B, como, por ejemplo, en la siguiente secuencia de prácticas:

1. Se supone que, si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio.
2. Por tanto, la relación que se establece entre las cantidades del producto compradas y el precio pagado es de proporcionalidad directa.
3. En una proporcionalidad directa las razones de las cantidades que se corresponden son iguales: $5/500 = x/450$; siendo x el precio al que debe venderse 450 gramos de café.
4. En toda proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos,
$$5\times450 = 500\times x,$$
5. Luego, $x = (5\times450)/500 = 4{,}5$.
6. Por tanto, el precio del paquete debe ser 4,5 euros.

Si bien la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación, la actividad de algebrización que se realiza es de nivel 2 (proto-algebraica), según el modelo de Godino et al. (2014), ya que la incógnita está despejada en un miembro de la ecuación que se establece mediante la proporción.

Una variante diagramática de esta técnica de solución se conoce como la “regla de tres”, que en cierto modo “oculta” la intervención de las razones y la proporción, lo cual puede comportar un significado “degenerado” de la proporcionalidad aritmética (Figura 2):

$$\left.\begin{array}{lcl} 500 & \text{———} & 5 \\ 450 & \text{———} & x \end{array}\right\} \quad x = \frac{450 \times 5}{500} = 4{,}5$$

Figura 2. Regla de tres

4.1.3. Significado algebraico-funcional

El significado propiamente algebraico se caracteriza por la aplicación de la noción de la función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones: $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ka) = kf(a)$. Una de estas técnicas se aplica a continuación:

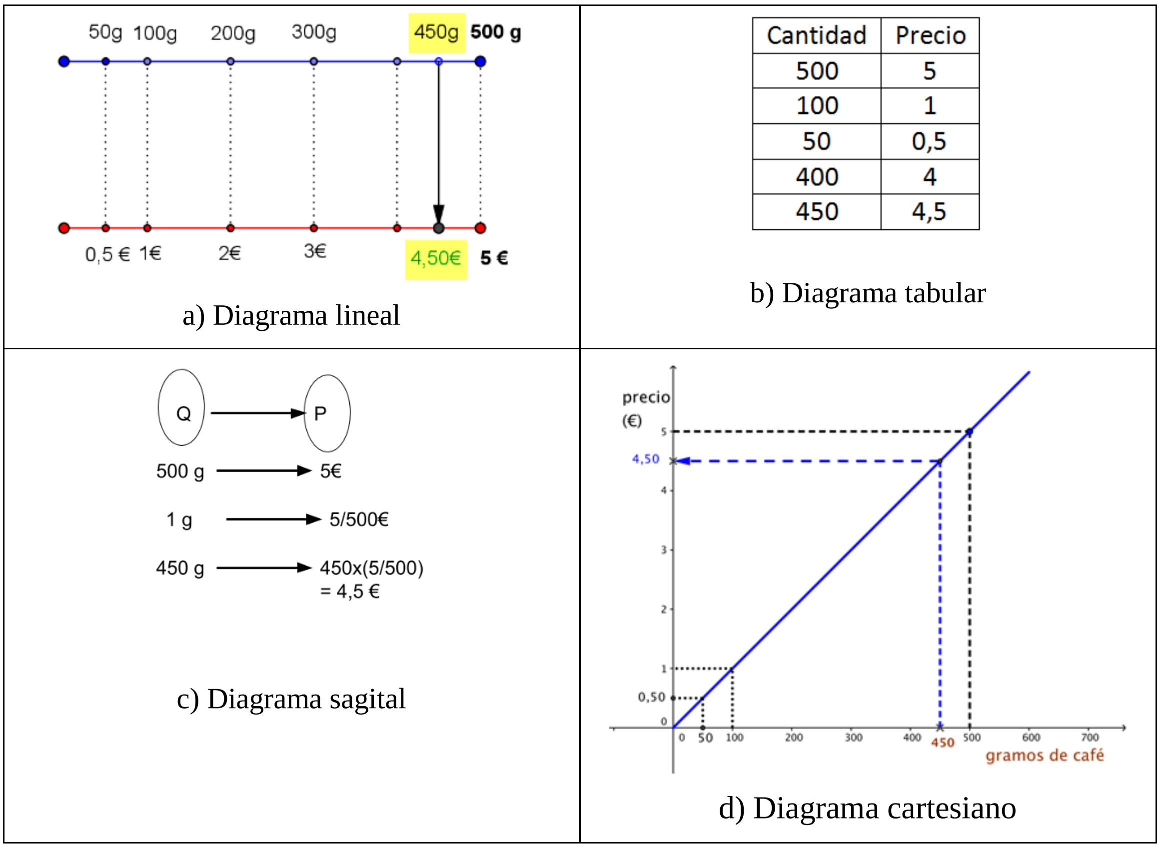
1. Se supone que si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Además, lo que pagaremos por dos paquetes de café distintos, será igual al precio de un paquete que pesase lo mismo que los dos juntos.
2. Por tanto, la correspondencia que se establece entre el conjunto de las cantidades del producto (Q) y el conjunto de los precios pagados (P), $f: Q \to P$, es lineal.
3. En toda función lineal f, se cumple que, la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes, $f(a+b) = f(a) + f(b)$, y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número, $f(ka) = kf(a)$.
4. El coeficiente k de la función lineal es el coeficiente de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes (tanto por uno).
5. Aplicando dichas propiedades al caso se tiene:

   $f(500g) = 5€$; $500f(1g) = 5€$; $f(1g) = \frac{5}{500}€$ [Un gramo de café cuesta 1 céntimo]

6. $450f(1g) = 450 \times \frac{5}{500}€$; $f(450g) = 4{,}5€$.
7. Luego el precio de un paquete de 450 gramos debe ser de 4,5 euros.

Representaciones diagramáticas de soluciones que ponen en juego la noción de función se incluyen en la Figura 3. En estos casos la actividad matemática que se realiza se puede calificar de proto–algebraica de nivel 1.

Algunos autores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Obando, Vasco y Arboledas, 2014) enfatizan el razonamiento proporcional como un razonamiento que involucra una función lineal en un sistema de dos variables. Así pues, el modelo matemático es una función de la forma $y = k \cdot x$, en el que k es la razón constante, generalmente conocida como constante de proporcionalidad. Aunque se hable de la “función lineal”, en singular, en realidad se pone en juego el conocimiento de la estructura de una familia de funciones, ya que k interviene como un parámetro, lo que supone un primer contacto con el nivel cuatro de algebrización que definen Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015).



a) Diagrama lineal

Cantidad	Precio
500	5
100	1
50	0,5
400	4
450	4,5

b) Diagrama tabular

c) Diagrama sagital

d) Diagrama cartesiano

Figura 3. Soluciones diagramáticas

Dada la eficacia matemática del razonamiento algebraico parece deseable, desde el punto de vista de la idoneidad epistémica, que los procesos de instrucción tiendan a lograr el nivel algebraico de significación para el razonamiento proporcional. Pero no parece idóneo, desde el punto de vista cognitivo y afectivo, prescindir de los niveles precedentes. No obstante, la resolución de problemas que involucran la proporcionalidad en la vida cotidiana y profesional, puede ser idónea mediante la aplicación de procedimientos propios de la significación aritmética, incluso con la variante degenerada de la regla de tres.

4.2. Configuraciones ontosemióticas

En este apartado analizamos las prácticas correspondientes a la solución proto-algebraica y algebraica-funcional del problema (coste del paquete de café) aplicando la noción de configuración ontosemiótica. Se trata de identificar los tipos de objetos matemáticos y procesos[4] puestos en juego y, por tanto, los conocimientos involucrados en cada caso en una solución esperada o experta del problema.

4.2.1. Configuración proto-algebraica

En la primera columna de la Tabla 1 se incluye la secuencia de prácticas elementales de una posible solución proto-algebraica esperada para el problema. En la segunda columna se muestra el papel e intencionalidad que tiene cada práctica en la secuencia de prácticas incluidas en la columna 1, y en la tercera se indican los objetos conceptuales,

[4] En esta ocasión centramos la atención en los procesos de interpretación/ significación. Dado que se trata de la solución de un problema específico el proceso de particularización de conceptos y proposiciones generales es patente en las distintas prácticas elementales.

proposicionales, procedimentales y argumentativos implicados en dichas prácticas. De esta manera se explicitan las funciones semióticas (relación entre expresión y contenido) que se establecen entre los objetos ostensivos de las prácticas textualizadas y los objetos no ostensivos referidos por las mismas (procesos de significación/ interpretación). Se supone, por tanto, que las prácticas elementales relatadas en la columna 1 están constituidas por la expresión escrita en lengua natural, numérica y simbólica –y, por tanto, ostensiva– de las acciones que el sujeto epistémico realiza para dar solución al problema. Los elementos no ostensivos que necesariamente intervienen en las acciones del sujeto están referidos en las otras columnas.

Tabla 1. Configuración ontosemiótica de la solución proto-algebraica

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos ...)
1. Se supone que si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio.	Explicitar que se cumplen en el contexto del problema las condiciones de aplicación de la proporcionalidad directa	*Conceptos:* multiplicación; secuencia ilimitada; correspondencia funcional, magnitud, cantidad, medida *Proposición* P1: enunciado de la práctica 1. *Argumento*: convención pragmática
2. Por tanto, la relación que se establece entre las cantidades del producto compradas y el precio pagado es de proporcionalidad directa	Declarar que la relación establecida entre las magnitudes heterogéneas es de proporcionalidad directa	*Concepto*: relación, cantidad, producto proporcionalidad directa *Proposición* P2: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad directa *Argumento*: se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad directa
3. En una proporcionalidad directa las razones de las cantidades que se corresponden son iguales: 5/500 = x/450;	Representar con un símbolo literal el valor faltante. Relacionar la incógnita con los datos	*Conceptos*: proporcionalidad directa, igualdad, ecuación, razón de cantidades, precio unitario, proporción, incógnita *Proposición* P3: las razones son iguales *Argumento*: porque el precio unitario es el mismo en ambos paquetes
4. En toda proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos, 5×450 = 500×x,	Operar con la incógnita	*Conceptos*: igualdad, proporción, producto Proposición: enunciado de 4) *Argumento*: basado en una propiedad de las proporciones
5. Luego, x = (5×450)/500 = 4'5.	Despejar la incógnita	*Conceptos*: igualdad, razón, ecuación *Procedimiento*: despeje de la incógnita. *Argumento*: propiedades aritméticas, deductivo
6. Por tanto, el precio del paquete debe ser 4,5 euros.	Interpretar el resultado numérico como solución del problema.	*Conceptos*: magnitud, cantidad, medida, unidad *Proposición*: el precio del paquete es 4,5€ *Argumento*: secuencia de prácticas 1) a 5)

El análisis de las prácticas realizadas en este procedimiento de solución revela que involucran el uso de una incógnita y se establece una ecuación de primer grado para hallarla. Como ya se ha dicho, la actividad tiene carácter proto-algebraico de nivel 2 según la propuesta de Godino et al. (2014).

4.2.2. Configuración algebraica-funcional

La Tabla 2 muestra la secuencia de prácticas puestas en juego en la solución que hemos llamado algebraica-funcional del problema del precio del paquete de café, la intencionalidad que tienen dichas prácticas en la secuencia y los objetos referidos en las prácticas.

Tabla 2. Configuración ontosemiótica de la solución algebraica

Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos ...)
1. Se supone que si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Además, lo que pagaremos por dos paquetes de café distintos, será igual al precio de un paquete que pesase lo mismo que los dos juntos.	Explicitar que se cumplen en el contexto del problema las condiciones de aplicación de la función lineal entre conjuntos de cantidades de magnitudes.	*Conceptos*: multiplicación, secuencia ilimitada, proporcionalidad, correspondencia funcional, magnitud, cantidad. *Proposición P1*: el enunciado de la práctica 1). *Argumento*: convención pragmática
2. Por tanto, la correspondencia que se establece entre el conjunto de las cantidades del producto (Q) y el conjunto de los precios pagados (P), $f: Q \rightarrow P$, es lineal.	Declarar que la relación establecida entre las magnitudes heterogéneas es lineal.	*Conceptos*: conjuntos, correspondencia, magnitud, cantidad, medida, relación lineal. *Proposición P2*: la correspondencia entre los conjuntos de cantidades es lineal. *Argumento*: se cumplen las condiciones que definen la función lineal según 1).
3. En toda función lineal, f, se cumple que, la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes, $f(a+b) = f(a) + f(b)$, y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número, $f(ka) = kf(a)$.	Explicitar las condiciones de definición de las funciones lineales de dos maneras: – lenguaje natural; – lenguaje simbólico literal.	*Conceptos*: suma de cantidades, producto por un escalar, original e imagen de una función, función lineal, producto. *Procedimiento*: traducción lenguaje natural a simbólico.
4. El coeficiente k de la función lineal es el coeficiente de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes (tanto por uno).	Interpretar el coeficiente k de las funciones líneas en términos del contexto del problema (coeficiente de proporcionalidad o tanto por uno).	*Conceptos*: proporcionalidad directa, magnitud, coeficiente de proporcionalidad, tanto por uno.
5. Aplicando dichas propiedades al caso se tiene: $f(500g) = 5€;\ 500f(1g) = 5€;$ $f(1g) = \frac{5}{500}€$ [un gramo de café cuesta 1 céntimo]	Calcular el coste unitario.	*Conceptos*: función lineal; igualdad; proporcionalidad. *Procedimientos*: traducción del lenguaje natural (enunciado) al simbólico; cálculo del coeficiente de proporcionalidad basado en las condiciones de definición de una función lineal.
6. $450f(1g) = 450 \times \frac{5}{500}$ € $f(450g)$ = 4,5€	Calcular el valor faltante.	*Conceptos*: función lineal, igualdad, proporcionalidad. *Procedimiento*: cálculo del valor faltante basado en las condiciones de

		definición de la función lineal.
7. Luego el precio de un paquete de 450 gramos debe ser de 4,5 euros.	Interpretar el resultado numérico como solución del problema.	*Proposición*: precio del paquete es 4,5€. *Argumento*: secuencia de prácticas 1) a 6).

Dado que las soluciones del problema que han sido analizadas desde un punto de vista institucional son soluciones esperadas o expertas, tales sistemas de prácticas y configuraciones tienen un carácter epistémico. La misma técnica se puede aplicar a respuestas dadas por los estudiantes obteniéndose, de este modo, las correspondientes configuraciones cognitivas. La dualidad ostensivo-no ostensivo muestra aquí su utilidad al distinguir entre las prácticas textualizadas situadas en la primera columna como objetos ostensivos, los cuales evocan y representan los objetos conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativos identificados en la tercera columna. Los objetos ostensivos tienen además un papel instrumental o una funcionalidad que se refleja en la segunda columna.

5. Reflexiones finales

La interpretación de los significados de un objeto matemático en términos de sistemas de prácticas facilita la consideración de tales sistemas, y en consecuencia los significados pragmáticos, como nuevos objetos. Esta perspectiva ontosemiótica permite aplicar la metáfora ecológica para describir y explicar fenómenos relacionados con la difusión del conocimiento, la enseñanza y el aprendizaje (Godino, 1993). Los conceptos de *econicho* y de *relación ecológica*, basados en la teoría general de sistemas, pueden ser aplicados a objetos no vivos, sustituyendo los criterios de viabilidad, persistencia o existencia indefinida, por cualquier noción de utilidad, disponibilidad, acoplamiento o compatibilidad (Godino, 1993, p. 95).

Entre los diversos significados del objeto proporcionalidad se establecen relaciones de interdependencia, simbiosis y cooperación; pudiendo unos significados estar mejor adaptados en unas circunstancias que en otras. Los significados geométrico, probabilístico, estadístico, o de otros contextos, requieren de la cooperación de los significados aritmético o proto-algebraico para dar respuesta a las cuestiones que involucran el razonamiento proporcional. La regla de tres, en su interpretación aritmética, o incluso en su versión algorítmica/instrumental tiene de hecho su nicho ecológico en el contexto de la vida cotidiana o incluso en los contextos técnico-profesionales y artísticos. No obstante, dado el papel esencial del álgebra en las distintas ramas de la matemática, la implementación del significado algebraico de la proporcionalidad en la escuela secundaria es un factor positivo para el progreso del aprendizaje matemático de los estudiantes.

El foco de atención de este trabajo ha sido clarificar dos nociones fundamentales desarrolladas en el marco del EOS: significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas. Particularizado al caso de la proporcionalidad, hemos mostrado, tal como se afirma en Godino, Giacomone, Batanero y Font (en prensa), que la aplicación de las herramientas de análisis de significados pragmáticos y análisis ontosemiótico de las prácticas permite dar una respuesta al problema de la naturaleza del conocimiento especializado del contenido matemático, que debería tener el profesor para poder gestionar los procesos de estudio matemático con idoneidad epistémica. Es claro que el profesor debe tener, además, conocimientos relacionados con las orientaciones curriculares, desarrollo cognitivo y conflictos de aprendizaje, así como ser competente en el diseño y gestión de recursos didácticos específicos para el estudio de la proporcionalidad (Ben-Chaim, Keret y Ilany, 2012; Fiol y Fortuny, 1990; Godino y Batanero, 2002).

El análisis en dos niveles que se propone, deja en evidencia la importancia que tiene el uso competente de dichas herramientas tanto para el profesor de matemáticas como para el formador de profesores. El profesor de matemáticas debe conocer los diversos significados de los objetos matemáticos, tanto los informales como los formales y sus interconexiones. Pero incluso para cada significado parcial del objeto, y la resolución de las tareas prototípicas que los caracterizan, es necesario que el profesor conozca la trama de objetos y procesos implicados, con el fin de poder planificar la enseñanza, gestionar las interacciones en el aula, comprender las dificultades y evaluar los niveles de aprendizaje de los estudiantes.

La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas es una competencia que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

Referencias

Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Madrid: Síntesis.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Hingham, MA: Kluwer.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante, 2*(2), 69-79. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/fundamentos_tem.pdf

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (en prensa). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, (aceptado).

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, *17*(1), 59-81.

Peirce, C. S. (1934). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. (Vol. 5.402). C. Hartshorne y P. Weiss (Eds.). Cambridge: Harvard University Press.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181-204.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *27*(1), 77-120.