

Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad

Introducing educational innovation and research through the analysis of the didactical suitability for a teaching experience about proportionality

Carlos J. Aroza¹, Juan D. Godino¹, Pablo Beltrán-Pellicer²

¹ Universidad de Granada, España.

² Universidad de Zaragoza, España.

carlosjosearoza@gmail.com, jgodino@ugr.es, pbeltran@unizar.es

Resumen

La innovación fundamentada de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere del profesor una actitud y competencia para la reflexión e indagación sistemática sobre la propia práctica. El desarrollo de dicha competencia debe ser un objetivo de la formación inicial de profesores. En este artículo se describe el proceso de indagación y reflexión sobre una experiencia de enseñanza realizada en la fase de prácticas del máster de formación inicial de profesorado de secundaria en la especialidad de Matemáticas. La reflexión se realiza aplicando la noción de idoneidad didáctica a un proceso de enseñanza y aprendizaje implementado sobre la proporcionalidad y porcentajes en primer curso de educación secundaria. La valoración de la idoneidad didáctica, y la consiguiente identificación de propuestas fundamentadas de cambio para el rediseño de la experiencia, requiere recopilar y sintetizar los conocimientos didáctico-matemáticos producidos en la investigación e innovación sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. Dichos conocimientos son sintetizados en criterios de idoneidad específicos para el tema abordado. Se concluye que la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica ayuda a sistematizar los conocimientos didácticos y su aplicación a la reflexión y mejora progresiva de la práctica de la enseñanza.

Palabras Clave

Educación matemática, formación de profesores, educación secundaria, idoneidad didáctica, proporcionalidad y porcentajes.

Abstract

Well-founded innovation in teaching and learning processes requires some skills from the teacher, such as a reflective attitude and a competence in systematic inquiring into his own practice. Developing this kind of competence should be an objective in initial teacher education. This article describes the inquiring and reflecting process into a teaching experience carried out within the practical phase of the initial teacher education master, Mathematics speciality in secondary education. Reflection is done applying the notion of didactic suitability to a teaching and learning process about proportionality and percentages, implemented in a first course of secondary education (12-13 years-old). The assessment of the didactic suitability, and the resulting identification of well-founded change proposals, oriented towards a redesign of the experience, require to review and to synthesise the didactic-mathematic knowledge coming from research and innovation in the teaching and learning of proportionality. The analysis of this knowledge leads to specific suitability criteria for the considered field. It is concluded that the implementation of didactic suitability criteria helps to systematize the didactic knowledge and supports its application to the reflection and the progressive improvement of the teaching practice.

KeyWords

Mathematics education, teacher education, secondary education, didactical suitability, proportionality and percentages.

1. Introducción

Diversas tendencias sobre la formación de profesores, tanto inicial como continua, proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre la práctica docente como una estrategia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. En particular, la investigación – acción es un método de investigación cualitativa que se basa, fundamentalmente, en convertir en centro de atención lo que ocurre en la actividad docente cotidiana, con el fin de descubrir qué aspectos pueden ser mejorados o cambiados para conseguir una actuación más satisfactoria (Elliot, 1991). La práctica docente se considera el marco de referencia de todo el proceso de investigación contemplando la acción y la reflexión como dos caras de una misma realidad.

Los investigadores en la acción planifican ciclos de acción y reflexión y por tanto deben ser reflexivos sobre cómo se despliegan los esfuerzos de cambio, y el impacto que nuestra presencia (la intervención) está teniendo. (Bradbury-Huan, 2010, p. 98).

Se trata, por tanto, de una vía de formación que permite al profesorado ejercer la investigación en el aula en busca de una mejora significativa de la calidad educativa. La reflexión constituye la fase que cierra el ciclo y da paso a la elaboración del informe y, posiblemente, al replanteamiento del problema para iniciar un nuevo ciclo de la espiral auto-reflexiva. La innovación educativa, es decir, el cambio fundamentado de la práctica docente, debe estar apoyada en una actitud de investigación y reflexión sobre los distintos factores que condicionan el ejercicio de la profesión.

En este trabajo, se describe una experiencia de iniciación a la investigación y la innovación educativa realizada en el marco del Máster de Profesorado de Educación

Secundaria, centrada en el análisis de una experiencia de enseñanza sobre la proporcionalidad, realizada durante la fase de prácticas por el primer autor y aplicando como herramienta teórica de apoyo para la reflexión la noción de idoneidad didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, 2013).

Organizamos el artículo en los siguientes apartados. Tras esta introducción general, en la sección 2 describimos el problema de indagación y el marco teórico mediante el cual se aborda. En la sección 3 describimos la experiencia de enseñanza de proporcionalidad y porcentajes realizada en la fase de prácticas en un instituto en un grupo de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Se realiza una breve descripción del grupo en el cual se ha impartido la unidad, el tipo de enseñanza aplicada, así como una síntesis de la evaluación de los aprendizajes logrados por los estudiantes. Dado que la emisión de un juicio fundamentado sobre la idoneidad de un proceso de enseñanza - aprendizaje requiere establecer previamente un marco de referencia, en la sección 4 hemos sintetizado los principales resultados de investigaciones e innovaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje del tema tratado. Apoyados en esta síntesis de conocimientos didáctico-matemáticos, presentamos en la sección 5 la valoración de la idoneidad didáctica de la experiencia de enseñanza descrita en la sección 3, así como algunas propuestas de cambio. En la última sección, hacemos una síntesis del trabajo, resaltando algunos criterios para la revisión del diseño e implementación de la unidad didáctica experimentada.

2. Problema y marco teórico

Como indican Godino y Batanero (2009), el valor de la reflexión sobre la experiencia como un medio para estimular el aprendizaje ha sido destacado desde hace varias décadas. Schön (1983) describió la reflexión como “una continua interacción entre el pensamiento y la acción” (p. 281); y describió al “práctico reflexivo” como la persona que “reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura” (p. 50). En trabajos recientes de diversos campos se ha introducido el concepto de “reflexión guiada” como un proceso de indagación innovador en el que el práctico es asistido por un mentor (o “guía”) mediante un proceso de auto-indagación, desarrollo, y aprendizaje a través de la reflexión, con el fin de llegar a ser enteramente efectivo. También, en el campo de la formación de profesores, se encuentran referencias en las que se informan de investigaciones en las que se desarrollan y experimentan técnicas específicas de “reflexión guiada” (Nolan, 2008).

En nuestro caso, vamos a aplicar como herramienta o guía para la reflexión la noción de idoneidad didáctica. Esta noción teórica, sus dimensiones, criterios, y desglose operativo, han sido introducidas en diversos trabajos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, 2013) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula.

La idoneidad didáctica se define como el grado en que un proceso de instrucción (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto

supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones (Godino, 2013):

1. Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
2. Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
3. Idoneidad cognitiva, grado en que los significados pretendidos e implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
4. Idoneidad afectiva, grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.
5. Idoneidad interaccional, grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
6. Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El problema que abordamos en este trabajo lo podemos formular en los siguientes términos:

1. ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje, sobre la proporcionalidad y porcentajes, experimentado durante el periodo de prácticas en primero de la ESO?
2. ¿Qué cambios se podrían introducir, en el diseño e implementación del proceso de estudio, para incrementar su idoneidad didáctica?

En el marco de la teoría de la idoneidad didáctica se establece que, para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático, es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente. Ello requiere proceder a una revisión sistemática de los resultados de las investigaciones e innovaciones realizadas en educación matemática sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales. Esto nos lleva a plantearnos una tercera cuestión previa:

3. ¿Cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos resultados de las investigaciones e innovaciones previas realizadas sobre la enseñanza - aprendizaje de la proporcionalidad y los porcentajes?

Desde el punto de vista metodológico, este trabajo sigue una pauta iniciada por Posadas (2013) como estrategia formativa de profesores de matemáticas de educación secundaria apoyada en la aplicación de la noción de idoneidad didáctica.

3. Descripción de una experiencia de enseñanza de la proporcionalidad

3.1. El grupo de clase

La unidad didáctica se ha impartido en uno de los grupos de primero de la ESO. Se trata de una clase de 30 alumnos, compuesto por 8 alumnas y 22 alumnos, en la que cabe señalar el alto índice de alumnado inmigrante (40%, 9 nacionalidades de origen diferentes), lo que supone cierta heterogeneidad y diversidad cultural. Es un aula en la que es difícil mantener el ambiente adecuado, siendo necesario llamarles la atención a menudo. Por otro lado, más de la mitad de los alumnos presentan actitudes negativas hacia el estudio y hacia las matemáticas en particular. Esto es debido, en parte, al desajuste curricular que arrastran 17 de ellos desde la etapa de primaria, con muchas dificultades de comprensión de conceptos matemáticos básicos y procedimentales. El resto de alumnos muestran motivación e interés por la asignatura.

La relación profesor-alumno es asimétrica, quedando bien definida la figura del profesor como autoridad. A pesar de ello, el trato entre profesor y alumno es muy cercano. Durante los días en los que se ha intervenido en las clases, han mostrado una actitud respetuosa y participativa dentro del aula.

3.2. Diseño de la unidad didáctica

Marco curricular. Los contenidos curriculares relacionados quedan definidos por la norma estatal (MECD, 2014), que establece el currículo básico de la ESO y del Bachillerato a desarrollar por las comunidades autónomas. Los contenidos de proporcionalidad y porcentajes son los siguientes:

- Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales.
- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.

En el apartado de criterios de evaluación se indica:

- Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.), para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real, en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directamente o inversamente proporcionales.

Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para alcanzar los siguientes estándares de aprendizaje:

- Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

- Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directamente ni inversamente proporcionales.

Los conocimientos previos que se requieren para el estudio de este tema son las fracciones (concepto de fracción equivalente y propiedades), resolución de problemas básicos de aritmética y números decimales. Estos conocimientos se incluyen también en el bloque de números y álgebra del currículo para este curso, de forma previa a la proporcionalidad.

Contenidos, actividades y secuenciación. El proceso de aprendizaje implementado a los alumnos, ha seguido básicamente la orientación y contenidos propuestos en el libro de texto (Colera y Gaztelu, 2010) que se viene usando en el primer curso de ESO, en el instituto en el que se han realizado las prácticas docentes. Siguiendo estos guiones del libro de texto, la unidad didáctica se ha impartido en once sesiones (ver Tabla 1) donde, además de las explicaciones (nociones teóricas), se han resuelto tareas. La última sesión se ha reservado para la realización de una prueba de evaluación formativa, para comprobar el nivel de comprensión de los alumnos sobre los diferentes conceptos de la unidad y valorar el nivel de aprendizaje procedimental en la resolución de los distintos tipos de tareas de proporcionalidad y porcentajes.

Sesión	Contenidos
1	Identificación y diferenciación de magnitudes que son directamente proporcionales e inversamente proporcionales. Ejemplos en el contexto cotidiano. Resolución en clase de tareas donde se distinguen magnitudes proporcionales y se completan tablas de valores directamente e inversamente proporcionales.
2	Problemas de proporcionalidad directa. Método de reducción a la unidad. Fracciones equivalentes en las tablas de valores directamente proporcionales. Regla de tres directa. Resolución de tarea ejemplo. Tareas del libro propuestas para casa.
3	Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior. Problemas de proporcionalidad inversa. Método de reducción a la unidad. Fracciones equivalentes en las tablas de valores inversamente proporcionales. Regla de tres inversa. Resolución de tarea ejemplo. Tareas del libro propuestas para casa.
4	Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior. Identificación y resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa mediante la regla de tres. Tareas del libro propuestas para casa.
5	Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior. Resolución individual por parte del alumno de tareas del libro para ser evaluadas.
6	Porcentajes: Concepto de tanto por ciento. El porcentaje como una fracción. Porcentajes y números decimales. Algunos porcentajes especiales. Resolución de tareas a modo de ejemplo para el cálculo del porcentaje de una cantidad. Tareas del libro propuestos para casa.
7	Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior. El porcentaje como una proporción: Cálculo de la parte mediante la regla de tres. El porcentaje como una proporción: Cálculo del total mediante la regla de tres. El porcentaje como una proporción: Cálculo del tanto por ciento mediante la regla de tres. Resolución de tareas a modos de ejemplo. Tareas del libro propuestos para casa.
8	Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior. Realización por parejas de tareas de porcentajes. Tareas del libro propuestos para casa.

9	Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior. Aumentos porcentuales: Método suma porcentual y método regla de tres simple. Disminuciones porcentuales: Método resta porcentual y método regla de tres simple. Resolución de tareas a modo de ejemplo. Tareas del libro propuestas para casa.
10	Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior. Repaso de la unidad de cara al examen y resolución de dudas. Resolución de tareas a modo de repaso de cara al examen.
11	Examen de evaluación formativa.

Tabla 1: Secuencia de contenidos de la unidad didáctica.

El libro de texto seguido en las clases (Colera y Gaztelu, 2010) propone introducir la proporcionalidad directa e inversa como la relación de dos magnitudes (Figura 1).

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, ...), la otra se multiplica de la misma manera (doble, triple, ...).
- Al dividir una (mitad, tercio, ...), la otra se divide de la misma forma (mitad, tercio, ...).

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, ...), se divide la otra (mitad, tercio, ...).
- Al dividir una (mitad, tercio, ...), la otra se multiplica (doble, triple, ...).

Figura 1: Introducción de la proporcionalidad en el libro de Colera y Gaztelu (2010).

De estas relaciones de proporcionalidad (directa e inversa) se derivan herramientas que facilitan la resolución de algunos tipos de problemas aritméticos, que se concretan en dos métodos de resolución: la reducción a la unidad y la regla de tres simple, tanto directa como inversa (Figura 2).

Método de reducción a la unidad

Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad.
Conociendo ese valor, es fácil completar cualquier par de valores correspondientes.

Regla de tres directa

Consiste en formar una pareja de fracciones equivalentes con los tres datos y la incógnita.

MAGNITUD 1	MAGNITUD 2	
a	\longrightarrow	m
b	\longrightarrow	x
		$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{m}{x} \end{array} \right\}$
$a \cdot x = b \cdot m \rightarrow x = \frac{b \cdot m}{a}$		

Regla de tres inversa

Para formar las fracciones equivalentes, se ha de invertir el orden de los valores en una de las magnitudes.

MAGNITUD 1	MAGNITUD 2
a	\longrightarrow m
b	\longrightarrow x
$\frac{a}{b} = \frac{x}{m} \rightarrow x = \frac{a \cdot m}{b}$	
\uparrow VALORES INVERTIDOS	

Figura 2: Procedimientos de resolución de problemas de proporcionalidad en el libro de texto.

El concepto de porcentaje se enfoca desde diferentes perspectivas, como se aprecia en la Figura 3. Así, se aborda como una operación, con un enfoque puramente procedimental, como una fracción, como un número decimal y como una proporción.

Por último, se estudia la resolución de dos tipos de problemas muy frecuentes en el contexto de la vida real y cotidiana; el aumento y la disminución porcentual, analizados desde dos métodos o algoritmos de resolución: la suma o resta del porcentaje y la regla de tres directa de proporcionalidad.

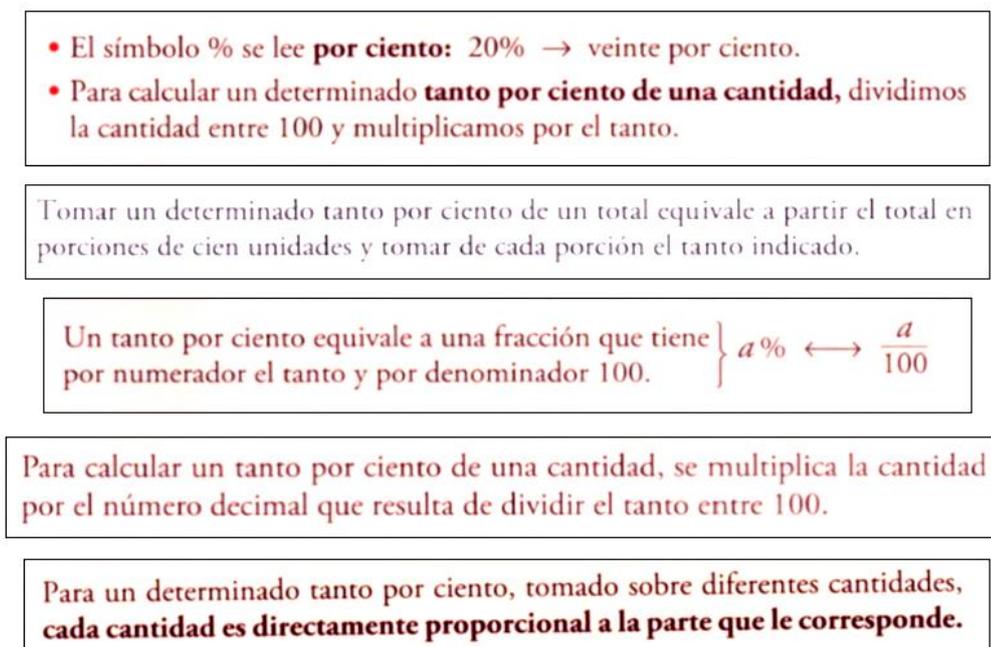


Figura 3: Tratamiento del concepto de porcentaje en el libro de texto de Colera y Gaztelu (2010).

Se observa, por tanto, que los autores del libro enfatizan una visión de las matemáticas como reglas o algoritmos a seguir, ilustradas con ejemplos de cómo interpretar tales reglas, seguidas de ejercitación procedimental para el dominio de la aplicación de las mismas.

3.3. Implementación del estudio

Las sesiones solían comenzar corrigiendo las tareas que los alumnos llevaban propuestas para realizar en casa y con un recordatorio de lo que se estudió en la sesión anterior. Se les preguntaba a los estudiantes las dudas o dificultades que se les habían presentado, para hacer hincapié en los conceptos o procedimientos implicados y afianzar los conocimientos clave. Posteriormente, se comenzaba a explicar la materia nueva. La introducción de contenido nuevo de la unidad didáctica se procuraba realizar siempre a través de ejemplos sencillos en situaciones de la vida cotidiana, aumentando el nivel de dificultad de forma gradual. Además, durante la explicación, se iban haciendo preguntas de los contenidos que los alumnos ya habían adquirido, para que mantuvieran el nivel de atención y siguieran la explicación.

Posteriormente, para desarrollar las explicaciones teóricas, se realizaban algunas tareas-ejemplos contextualizadas en situaciones de la vida real y se trataba de poner especial atención en los errores y dificultades que les podían surgir. Se hacía necesario enfatizar sobre los procedimientos y notaciones clave empleadas, tratando de

justificarlos lo máximo posible. En esta fase de resolución de tareas, fomentaba la participación activa del alumno en clase mediante preguntas frecuentes y salidas a la pizarra, para mantener su nivel de atención.

Por último, para potenciar el trabajo personal y un mayor grado de consecución de objetivos, cuando se acercaba el final de la clase, se proponían una serie de tareas para que realizasen en casa. Dichas tareas estaban relacionadas con la materia impartida ese día, para que adquirieran cierta destreza procedimental y afianzasen, con abundante práctica, los conocimientos adquiridos. Las tareas se corregían al comienzo de la siguiente sesión. Si las tareas se comenzaban a hacer en clase, se les permitía el trabajo por parejas.

En todo momento se siguió el orden y los contenidos del libro de texto, utilizándolo como guion, de modo que los alumnos pudieran acceder con facilidad a la materia, aunque en algunos casos se aportaban ejemplos y tareas que no aparecían en el mismo.

El concepto de proporcionalidad directa fue introducido mediante series de valores de magnitudes proporcionales en tablas (en los que abundaban los ejemplos de cantidad-precio), que los alumnos debían rellenar (Figura 4). De esta manera, los estudiantes podían comprobar que, cuando una de las magnitudes se multiplicaba por un número, la otra magnitud que era directamente proporcional a la primera, también debía multiplicarse por el mismo número. Y no solo eso, sino que cuando una de las magnitudes se dividía por un número, la otra magnitud, también debía dividirse por el mismo número, por ser ambas magnitudes directamente proporcionales.

Aquí aparecen dos magnitudes, el número de balones y el coste (euros), y podemos construir una tabla con los valores correspondientes:

N.º DE BALONES	1	2	3	4	?	...	8
COSTE (EUROS)	5	10	15	20	25	...	?

Es evidente que existe una relación entre ambas magnitudes, lo que nos permite completar la tabla. Diremos que esa relación es de proporcionalidad directa.

Figura 4: Introducción de la proporcionalidad directa por medio de valores ausentes en tablas que relacionan dos magnitudes (cantidad-precio) en el libro de texto de Colera y Gaztelu (2010).

El concepto de proporcionalidad inversa, fue introducido también, mediante ejemplos de serie de valores de magnitudes inversamente proporcionales en tablas, que ellos debían rellenar y en las que se relacionaban dichas magnitudes. Una vez introducida la proporcionalidad directa e inversa, se les propusieron a los alumnos multitud de situaciones, en las que debían distinguir si las dos magnitudes que se les ejemplificaban eran o no, directamente o inversamente proporcionales.

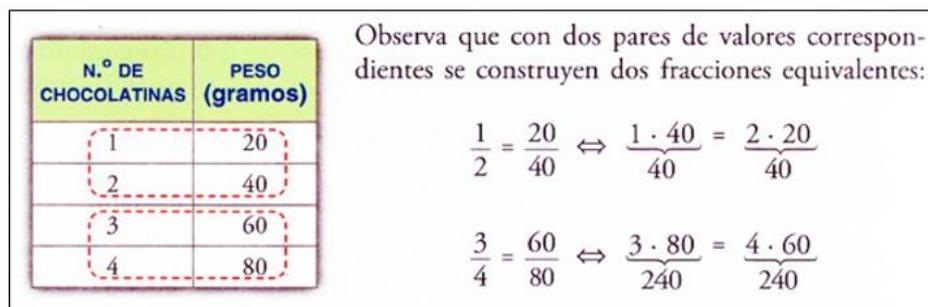


Figura 5: Fracciones equivalentes para ilustrar la proporcionalidad directa (Colera y Gaztelu, 2010).

Posteriormente, se les explicó que una de las características que poseen los valores de dos magnitudes proporcionales es que se pueden construir fracciones equivalentes con ellos (el reconocer cuándo dos fracciones son equivalentes entre sí, fue objeto de estudio en la unidad didáctica justamente anterior sobre “fracciones”). En la Figura 5 se observa el ejemplo propuesto para la proporcionalidad directa.

Para que pudieran resolver problemas de valor faltante o desconocido, en situaciones de proporcionalidad directa e inversa, se les explicó la regla de tres simple, que no es más que la construcción de dichas fracciones equivalentes para la obtención del dato incógnita.

En la parte de la unidad didáctica de porcentajes, se impartió la nomenclatura y el concepto de porcentaje desde el punto de vista de una fracción, de un número decimal y de una proporción directa, permitiéndose en éste último caso, usar la regla de tres directa para resolver problemas de cálculo de porcentajes. Como aplicación de los cálculos porcentuales se introdujeron los incrementos y disminuciones porcentuales, mediante dos métodos de resolución: la regla de tres directa y la suma o resta del porcentaje a la cantidad inicial.

En cuando a la manera de trabajar en clase, los alumnos realizaban de forma individualizada algunas tareas en el aula, relacionadas con la explicación previamente impartida. No obstante, se les permitía comentar las dudas con el compañero de clase, mientras el profesor trataba de resolver otras dudas al resto de los alumnos de forma personalizada. Más tarde, o en la sesión posterior, las tareas eran corregidas en la pizarra normalmente por el profesor, aunque, algunas veces, eran los propios alumnos quienes indicaban los pasos necesarios y el mismo profesor las escribía en la pizarra, y en esporádicas ocasiones, se realizaban salidas de los alumnos a la pizarra para su resolución. En todas las correcciones de las tareas, se trataba de enfatizar mucho sobre los errores que se hacían para que, de este modo, aprendieran a no cometerlos en futuras situaciones.

3.4. Evaluación de los aprendizajes logrados

Al finalizar la unidad didáctica, los alumnos fueron examinados mediante una prueba de evaluación formativa por escrito (Tabla 2) para comprobar si éstos aprendieron los contenidos y alcanzaron los objetivos que se habían propuesto. El examen, que sólo fue aprobado por el 57% de los alumnos, constaba de 10 tareas, igualmente valoradas cada una de ellas con un punto.

En la Figura 6 se muestra la distribución de frecuencias de la puntuación total obtenida por los 30 alumnos en la prueba escrita de evaluación final. Para ello, se tuvo en cuenta la siguiente valoración: 0 para aquellos alumnos que habían cometido errores graves en la resolución de la tarea o no la habían realizado, 0,5 para los que habían realizado parte de la tarea correctamente, y 1 para los que habían realizado la tarea totalmente correcta. La puntuación mediana fue de 5, dos alumnos obtuvieron puntuación 0, y otros dos la máxima puntuación, esto es, 10.

Tarea nº 1: Calcula:

- a) 50% de 80 = b) 25% de 80 = c) 50% de 24 =
d) 20% de 35 = e) 10% de 450 =

Tarea nº 2: En mi clase somos 24; el 50 %, chicas. ¿Cuántas chicas somos en clase?

Tarea nº 3: Se han hecho 1000 papeletas para una rifa y ya se ha vendido el 75%. ¿Cuántas papeletas se han vendido? ¿Cuántas quedan?

Tarea nº 4: Al comprar un jersey que costaba 80 euros, me han rebajado el 10%. ¿Cuánto me han rebajado?

Tarea nº 5: Roberto compra unos pantalones de 60 euros, pero le hacen una rebaja del 20%. ¿Cuánto le rebajan? ¿Cuánto paga?

Tarea nº 6: Di si son o no directamente proporcionales:

- a) El peso de una sandía y su precio.
- b) La edad de una persona y su altura.
- c) El tiempo que caminas a velocidad constante y la distancia que recorres.
- d) La talla de un pantalón y su precio.
- e) El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.

Tarea nº 7: Di cuales de las magnitudes siguientes son inversamente proporcionales:

- a) El número de operarios que descargan un camión y el tiempo que tardan.
- b) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir la distancia entre dos ciudades.
- c) El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.
- d) La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra.

Tarea nº 8: Un pintor barniza tres ventanas en una hora. ¿Cuántas ventanas barnizará en una jornada de 8 horas?

Tarea nº 9: Cuatro cajas de galletas pesan 2,4 kg. ¿Cuánto pesarían cinco cajas iguales a las anteriores?

Tarea nº 10: Cuatro segadores cortan un campo de heno en tres horas. ¿Cuánto tardará un solo segador? ¿Y seis segadores?

Tabla 2: Cuestiones de la prueba escrita.

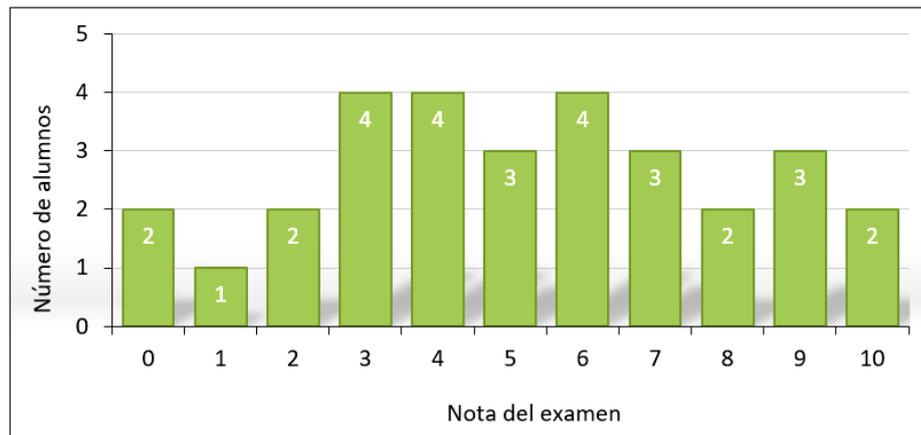


Figura 6: Distribución de frecuencias de la nota del examen.

Finalmente, se describen y sintetizan los principales errores y dificultades observados en las respuestas dadas por los alumnos, para cada una de las tareas.

Tarea n° 1. Errores y dificultades:

- El 80% de los alumnos mostraron dificultades a la hora de realizar las operaciones mentalmente, pese a que en ninguno de los apartados aparecen operaciones con decimales difíciles de calcular. Presentan errores a la hora de operar con decimales (multiplicaciones y divisiones).
- Uno de los alumnos marca la solución como un porcentaje, es decir: 50% de 80=40%.
- Dos de los alumnos multiplican la cantidad por el tanto, pero no la dividen por cien.
- Cuatro de los alumnos dejan esta tarea prácticamente en blanco.

El error más común es el de no operar correctamente con números decimales. En segundo lugar, los errores relativos a notaciones y, en tercer lugar, los errores conceptuales y procedimentales al calcular el porcentaje de una cantidad.

Tarea n° 2. Errores y dificultades:

Tan sólo dos de los alumnos en clase responden mal a esta pregunta; uno de ellos responde ¿26? Y el otro da una respuesta errónea al equivocarse en la operación de la división. El error más común es el no operar correctamente (división) y, por otra parte, la dificultad conceptual a la hora de calcular el porcentaje de una cantidad.

Tarea n° 3. Errores y dificultades:

- Tres de los alumnos en clase responden mal a esta pregunta; dos de ellos la dejan en blanco y otro comete un error a la hora de operar con decimales.
- Uno de los alumnos divide por el ciento, pero no lo multiplica por el tanto.

El error cometido más común es el de operar correctamente con números decimales (multiplicación) y, por otra parte, el error conceptual a la hora de calcular el porcentaje de una cantidad.

Tarea nº 4. Errores y dificultades:

- Dos de los alumnos asocian el problema a un cálculo de decremento porcentual y, además, proceden en el cálculo erróneamente: $80€ - 10\% = 70€$. Me han rebajado 10€.
- Tres de los alumnos dejan el problema en blanco.

El error más común es conceptual, correspondiente a calcular el porcentaje de una cantidad.

Tarea nº 5. Errores y dificultades:

- Tres de los alumnos entienden que es un problema de decremento porcentual, pero proceden erróneamente: $60€ - 20\% = 40€$. Me ha costado 40€ y me han rebajado 20€.
- Un 27 % de los alumnos dejan el problema en blanco

Los errores cometidos más comunes son conceptuales, referidos a calcular el porcentaje de una cantidad y el de calcular el decremento porcentual.

Tarea nº 6. Errores y dificultades:

- Dos de los alumnos dejan la tarea en blanco.
- Más del 50% de los alumnos comete al menos un fallo en alguno de los apartados.

El error cometido más frecuente es conceptual, que es el de no saber distinguir cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales. La mayoría de los alumnos que cometen algún fallo en esta tarea es porque llegan a asociar la proporcionalidad directa a que cuando una magnitud crece, la otra también, pero no que este crecimiento debe seguir una razón de proporcionalidad (detectándose un mayor número de errores en los apartados b y d).

Tarea nº 7. Errores y dificultades:

- Dos de los alumnos dejan la tarea en blanco.
- Más del 80% de los alumnos comete al menos un fallo en alguno de los apartados.

El error cometido más frecuente es conceptual, que es el de no saber distinguir cuándo dos magnitudes son inversamente proporcionales. A los alumnos parece que les cuesta más identificar las magnitudes que son inversamente proporcionales, detectándose un mayor número de errores en los apartados b, c y d.

Tarea nº 8. Errores y dificultades:

- Tan solo tres de los alumnos deja el problema en blanco, el resto lo soluciona correctamente, aunque no todos planteando la regla de tres directa.

La mayor dificultad presentada es la de no saber distinguir convenientemente del enunciado del problema las magnitudes que se relacionan, los datos que se presentan, el dato que se pide y las operaciones que hay que realizar.

Tarea n° 9. Errores y dificultades:

- El 30% de los alumnos no supieron plantear la regla de tres simple directa, o la plantearon incorrectamente al colocar los valores en las magnitudes que no les correspondían.
- Plantean correctamente la regla de tres simple directa, pero construyen erróneamente las fracciones equivalentes para resolver el problema.
- Operan incorrectamente (multiplicación y división) con números decimales.
- No identifican en la solución la unidad de la magnitud preguntada.
- No despejan adecuadamente la x de la ecuación.

El error cometido más común es el de no saber distinguir convenientemente del enunciado del problema las magnitudes que se relacionan y reconocer que son directamente proporcionales. En segundo lugar, saber plantear correctamente la regla de tres directa. En tercer lugar, construir correctamente las fracciones equivalentes. En cuarto lugar, operar sin errores (multiplicación y división) y, por último, saber despejar el valor desconocido en una ecuación.

Tarea n° 10. Errores y dificultades:

- El 25% de los alumnos no supieron plantear la regla de tres simple inversa.
- Muestran muchas dificultades en distinguir las magnitudes que son inversamente proporcionales. Más del 73% de los alumnos plantearon el problema como uno de proporcionalidad directa.
- Operan incorrectamente (multiplicación y división) con números.
- No despejan adecuadamente la x de la ecuación.

El error cometido más común es el de no saber distinguir correctamente del enunciado del problema las magnitudes que se relacionan, y reconocer que son inversamente o directamente proporcionales. En segundo lugar, saber construir correctamente las fracciones equivalentes una vez planteada la regla de tres inversa. En tercer lugar, operar sin errores con números decimales (multiplicación y división) y, por último, saber despejar el valor desconocido en la ecuación.

4. Conocimientos didáctico-matemáticos sobre proporcionalidad y porcentajes

Como se ha indicado, el objetivo del proceso formativo es conducir al futuro profesor a un análisis de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza implementado, orientado hacia la identificación de propuestas de cambio fundamentadas. Es por ello por lo que, en primer lugar, se ha realizado una recopilación y síntesis de las principales investigaciones e innovaciones relacionadas sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad y los porcentajes, para construir un fundamento que oriente la reflexión final. Con ayuda del tutor se identificaron, sintetizaron y clasificaron, los conocimientos didáctico-matemáticos sobre la proporcionalidad, de acuerdo a las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, descritas en la sección 2.

En este apartado, se incluyen los principales resultados de dicha síntesis, que serán usados como apoyo para valorar de, manera fundamentada, la idoneidad didáctica

de la experiencia de enseñanza e identificar posibles mejoras en nuevas implementaciones.

4.1. Faceta epistémica (conocimientos institucionales)

Desde una perspectiva epistémica, la proporcionalidad puede ser desarrollada según cuatro enfoques, aproximaciones o significados:

- Aproximación intuitiva y cualitativa, centrada en la comparación perceptiva de la semejanza de formas geométricas, o en la comparación multiplicativa de los números que intervienen en el problema.
- Aproximación geométrica, centrada en las razones y proporciones entre segmentos, semejanza de figuras y escalas.
- Aproximación aritmética, centrada en la noción de razón y proporción.
- Aproximación algebraica, centrada en la noción de función lineal.

Enfoque intuitivo – informal. La aproximación cualitativa, junto con actividades de estimación, juegan una parte importante en la comprensión de las razones y la proporcionalidad. Se trata de tareas que involucran aspectos cualitativos de la proporcionalidad; por ejemplo, que los estudiantes reconozcan perceptivamente las relaciones proporcionales entre formas de figuras dibujadas a escala (Ruiz y Valdemoros, 2009). El alumno, antes de saber razonar sobre figuras semejantes, teniendo en cuenta las relaciones cuantitativas entre las razones de segmentos, sabe discernir, sólo por simple percepción, si determinadas figuras están o no en la misma razón de proporcionalidad. Fiol y Fortuny (1990) proponen iniciar el estudio de la proporcionalidad a partir de las experiencias intuitivas de los estudiantes en el contexto geométrico y el uso de materiales manipulativos.

Enfoque geométrico (semejanza). Tareas relacionadas con las escalas, ampliaciones y reducciones de figuras conservando la forma, como las descritas en Ben-Chain, Keret y Ilany (2012), responden a este enfoque geométrico. Se trata ahora de pasar del estudio cualitativo de la semejanza de las figuras al cuantitativo, teniendo en cuenta las relaciones métricas entre los componentes de las figuras. Actividades como la reproducción de un puzle a escala diferente (Brousseau, 1997, p. 177) lleva a progresar desde el pensamiento aditivo al multiplicativo, propio del razonamiento proporcional, en un contexto geométrico. Godino y Ruiz (2002) hacen un estudio sistemático de la proporcionalidad geométrica desde el punto de vista de la formación matemática y didáctica de los maestros de educación primaria. Estos autores desarrollan el concepto de las transformaciones semejantes de figuras geométricas introduciendo previamente los conceptos de la razón de segmentos y de los segmentos proporcionales.

Enfoque aritmético (proporción). Godino y Batanero (2003) resaltan la importancia de clarificar los conceptos ligados a la proporcionalidad, en particular las nociones de razón, proporción y las magnitudes proporcionales, además de los conceptos de fracción y número racional. La idea clave es que una razón es un par ordenado de cantidades de magnitudes (homogéneas o heterogéneas), las cuales son comparadas de manera multiplicativa. Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida. A partir del concepto de razón, se define la proporción como la expresión de igualdad de dos razones. Cuando se prescinde de las unidades de medida

de las cantidades correspondientes, una proporción aparece en general bajo la forma de una igualdad entre dos fracciones equivalentes. Este enfoque aritmético del estudio de la proporcionalidad es el que predomina en muchas de las propuestas curriculares, innovaciones e investigaciones (Ben-Chain, Keret y Ilany, 2012; Lamon, 2007).

Enfoque algebraico (función). Los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado unificado con la noción de función lineal, modelo matemático que sintetiza diversos lenguajes, situaciones y fenómenos. “La función lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de la proporcionalidad” (Fiol y Fortuny, 1990, p. 83). Algunos autores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Obando, Vasco y Arboleda, 2014) enfatizan el razonamiento proporcional como un razonamiento que involucra una función lineal en un sistema de dos variables, que permite llegar a conclusiones acerca de una situación o un fenómeno que puede ser caracterizado por una razón constante entre cantidades de magnitudes. Así pues, el modelo matemático es una función de la forma $y = k \cdot x$, en el que k es la razón constante, generalmente conocida como constante de proporcionalidad. La gráfica cartesiana de este tipo de función es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Dado el papel fundamental que la noción de función desempeña en la matemática, se considera que el estudio de la proporcionalidad con un enfoque funcional debería ser privilegiado respecto al enfoque aritmético.

Sustentar la enseñanza en uno de estos enfoques exclusivamente puede dar lugar a la formación de obstáculos epistemológicos. Por ejemplo, existe una tendencia, bien documentada, de que gran parte del alumnado tiende a utilizar el modelo lineal (expresado en la regla de tres) en situaciones que no resultan apropiadas, dada la facilidad con que este modelo puede generalizarse (Modestou y Gagatsis, 2007). No obstante, hay autores que inciden en la naturaleza instruccional de estos obstáculos (De Bock et al., 2007).

En la Tabla 3 incluimos criterios específicos de idoneidad epistémica para el tema de la proporcionalidad en secundaria, inferidos de las publicaciones consultadas y referidas previamente, así como teniendo en cuenta los componentes y criterios propuestos en Godino (2013).

COMPONENTES	CRITERIOS
Significados y relaciones	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se identifican y desarrollan de una manera organizada los cuatro tipos de enfoques o significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y el algebraico. ▪ Se establecen conexiones entre los distintos tipos de enfoque de la proporcionalidad mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc. ▪ Se aplica la proporcionalidad y los porcentajes en contextos no matemáticos como la física, la química, la economía, etc.
Situaciones-problemas	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes, distinguiendo las situaciones que se

	<p>pueden modelizar de manera lineal de las que no.</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Se promueve que el alumno se plantee problemas relacionados con la proporcionalidad y porcentajes.
Lenguaje matemático	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) en la resolución de tareas de proporcionalidad y porcentajes, realizando traducciones y conversiones entre los distintos tipos. ▪ Se fomenta que los alumnos manejen y construyan las diferentes expresiones y representaciones de la proporcionalidad y porcentajes (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas. ▪ El nivel del lenguaje matemático empleado es el adecuado para los estudiantes del nivel educativo de primero de la ESO.
Reglas (Definiciones, propiedades y procedimientos)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se presentan de manera clara los conceptos y procedimientos fundamentales de la proporcionalidad para el nivel educativo de primero de la ESO, distinguiendo, razón, tasa, proporción, porcentaje, fracción y número racional. ▪ Se proponen tareas donde los alumnos tienen que reconocer y aplicar definiciones, propiedades y procedimientos de la proporcionalidad y los porcentajes.
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se plantean tareas de proporcionalidad y porcentajes que fomenten la reflexión, el razonamiento y la argumentación por parte del alumno. ▪ Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones de los contenidos de proporcionalidad y porcentaje son adecuados para el nivel educativo de primero de la ESO

Tabla 3: Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

4.2. Facetas cognitiva y afectiva

A partir de los trabajos de corte cognitivo de Inhelder y Piaget (1955) en torno al razonamiento proporcional han surgido diferentes propuestas de enseñanza y líneas de investigación. En la concepción piagetiana, esta forma de razonamiento es una de las ocho fases básicas que caracterizan el nivel de desarrollo formal de la persona, enmarcándose en el estadio de las operaciones formales propio de la adolescencia. En dicho estadio, se requiere del uso de un razonamiento hipotético deductivo, el cual le permite al sujeto utilizar una relación matemática (razón) y a partir de ésta deducir una segunda relación también matemática (proporción). Las nociones de comparación y covariación son la base del razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una gran variedad de disciplinas científico-técnicas, así como en la vida cotidiana.

Tourniaire y Pulos (1985) consideran que las estrategias correctas más empleadas son las *multiplicativas* y las de *construcción progresiva*. En cuanto a los errores y dificultades más corrientes, nos encontramos con los siguientes (Fernández, 2001):

- Ignorar parte de los datos del problema. Por ejemplo, si el problema es de comparación de razones entonces intentan resolverlo comparando únicamente los antecedentes (o los consecuentes) de las dos razones y toman la decisión mediante un razonamiento de tipo directo (o inverso).
- En otros casos, por ejemplo, si el problema es de valor faltante, el alumno ante la necesidad de obtener una solución numérica, opera con parte de los datos y obtiene una respuesta numérica. Esta estrategia la denomina como “*operaciones al azar*”.
- Estrategia aditiva o de la diferencia constante. En este caso, los alumnos relacionan los términos de una razón aditivamente, la cuantifican por sustracción entre los dos primeros términos de la razón y esta diferencia la aplican a la segunda razón.

Otra categorización es la que hace Lamon (1993), quien ordena en seis niveles, en relación con un menor o mayor razonamiento proporcional, las diferentes estrategias o actuaciones que usan los alumnos:

1. En el primer nivel, sitúa las actuaciones de los estudiantes que no tienen una interacción con el problema o que no responden.
2. En el segundo nivel, los alumnos dan respuestas sin justificar o usan sin éxito el método de ensayo o error, o estrategias aditivas incorrectas.
3. En el tercer nivel, los alumnos construyen patrones numéricos sin comprensión de las relaciones numéricas que utilizan.
4. En el cuarto nivel, se incluyen las actuaciones de los estudiantes que muestran tener capacidad para resolver los problemas usando materiales manipulativos, técnicas de conteo o de apareamiento, estrategias de construcción progresivas y reconocimiento de patrones para la construcción de tablas de proporcionalidad, pero no demuestran la comprensión de las propiedades estructurales de una proporción.
5. En el quinto, los estudiantes dan pruebas de un razonamiento proporcional de tipo cualitativo, usan correctamente el lenguaje cualitativo implícito en una comparación de razones y para ello utilizan las relaciones entre los cuatro datos del problema.
6. En el sexto, los estudiantes usan correctamente el lenguaje algebraico para representar proporciones y muestran su comprensión de las relaciones numéricas entre los datos, tanto las escalares (dentro de una magnitud) como las funcionales (entre magnitudes).

En la actualidad, los estudios se dirigen a establecer, cada vez con mayor precisión, características cognitivas específicas que permitan promover el desarrollo del

razonamiento proporcional y el aprendizaje de la proporcionalidad por medio de la resolución de situaciones y problemas de razón y proporción.

Desde la faceta afectiva, existen principalmente dos aspectos importantes que contribuyen adecuadamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional. Uno de ellos y más general, es el que refiere a concebir el aula de clase como un espacio social (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009), en el que se debe impulsar la participación del alumno, promover su responsabilidad en el trabajo tanto individual como grupal y fomentar su interés y motivación por la materia, haciéndole asumir la responsabilidad del compromiso de aprender los contenidos impartidos.

El segundo de estos aspectos se refiere más particularmente a la visión del contenido matemático de la proporcionalidad y los porcentajes como algo socialmente útil y preciso, que conforma un aprendizaje de cosas que se usan en el día a día de la gente, que contribuye con un desenvolvimiento social adecuado y que, por ende, su aprendizaje es de interés para las personas. De esta forma, el razonamiento proporcional constituye la base de un adecuado desenvolvimiento de la persona en actuaciones comunes de la vida diaria (por ejemplo, considerar la relación precio/peso o precio/número de piezas para elegir un producto), y además es el fundamento de diversos contenidos científicos en el resto del currículo escolar.

El profesor es una pieza fundamental para fomentar el interés y la motivación del alumno, dotando de sentido al contenido matemático de la proporcionalidad y mostrando su aprendizaje como una acción útil para el adecuado desenvolvimiento del alumno en el entorno que le rodea. Este objetivo es alcanzable desarrollando experiencias de enseñanza, tareas y aprendizajes de la proporcionalidad en las que se tengan en cuenta situaciones próximas al contexto sociocultural del alumno.

En la Tabla 4 se incluyen indicadores de idoneidad didáctica para las facetas cognitiva y afectiva; algunos son criterios generales propuestos en Godino (2013) y otros específicos para el estudio del tema de la proporcionalidad en secundaria, inferidos de las referencias citadas previamente.

COMPONENTES	DESCRIPTORES
Conocimientos previos	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de la proporcionalidad en su enfoque geométrico, aritmético y algebraico (tanto si se han estudiado anteriormente como si el profesor le dedica unas sesiones previas). ▪ Los contenidos pretendidos de proporcionalidad y porcentajes pueden ser alcanzados en sus diferentes enfoques por el alumnado, teniendo un nivel de dificultad accesible.
Aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Los distintos instrumentos de evaluación empleados deben indicar si los alumnos logran los niveles de aprendizaje pretendidos. ▪ Los instrumentos de evaluación tienen en cuenta la evaluación de los distintos niveles de adquisición del aprendizaje. ▪ Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Las tareas que se seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se incluyen tareas de ampliación y de refuerzo. ▪ Se fomenta el acceso y el logro de todos los estudiantes al contenido del tema de la proporcionalidad y porcentajes.
Intereses y necesidades	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Las tareas se contextualizan en temas de interés para los alumnos. ▪ Se proponen tareas de proporcionalidad y porcentajes que valoran su utilidad en la vida cotidiana y profesional del alumno.
Actitudes	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se promueve la participación del alumnado en las tareas y la responsabilidad en el trabajo en equipo. ▪ En la resolución en común de tareas se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice. ▪ Se incentiva la constancia y el trabajo sistemático.
Emociones	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se promueve la autoestima y seguridad en sí mismo para realizar tareas de proporcionalidad y porcentajes (evitando el rechazo, fobia o miedo a las tareas propuestas). ▪ Se resaltan las cualidades de estética y precisión de la proporcionalidad y los porcentajes.

Tabla 4: Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva y afectiva.

4.3. Faceta instruccional (*interaccional y mediacional*)

Desde una perspectiva instruccional, autores como Fernández (2001), proponen intervenir didácticamente por medio de una secuencia de tareas asociadas a la noción de razón y con un alto contenido de comparaciones proporcionales cualitativas, actuando desde edades tempranas, previas y preparatorias para que tal noción de proporcionalidad sea producto de las mismas. Este autor, como también Fiol y Fortuny (1990), propone un inicio de la enseñanza de la proporcionalidad informal, intuitivo y cualitativo dirigido, hacia la meta de la formalización y la algoritmización.

En esta propuesta de enseñanza debe tenerse en cuenta inicialmente las estrategias de resolución que emplean los alumnos; es decir, se debería partir de las estrategias informales de los estudiantes y reconducirlos a la adquisición de razonamientos funcionales-algebraicos. El aprendizaje de los algoritmos debe ser precisamente el punto de llegada o resultado de un profundo razonamiento, y no el punto de partida con un aprendizaje meramente mecánico.

Otra propuesta didáctica fundamentada de la proporcionalidad es la de Martínez et al. (2015). En dicha propuesta, se sugiere profundizar en la relación de proporcionalidad directa durante primer curso de ESO, dejando la inversa para segundo. Esto permite asimilar mejor el concepto y el manejo de la razón y las relaciones directas, permitiendo incluso tratar situaciones de proporcionalidad simple compuesta.

Para ello, priorizan el significado de razón como “tanto por uno”, para que la notación a/b represente una cantidad de una magnitud cociente y no dos números separados.

En el texto de Godino y Batanero (2003) se describen también algunas tareas y recursos que son fundamentales para iniciar al alumno en el estudio de la proporcionalidad, partiendo de un concepto intuitivo de razón y proporción, por lo que serán de gran ayuda en el desarrollo inicial del razonamiento proporcional:

1. Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos, que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.
2. Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones. Procurar que los alumnos distingan las situaciones de comparación multiplicativa (proporcionalidad), de las no multiplicativas, proporcionando ejemplos y discutiendo las diferencias entre ellas.
3. Ayudar a los alumnos a relacionar el razonamiento proporcional con otros procesos matemáticos. El concepto de fracción unitaria es muy similar al de tasa unitaria. El uso de tasas unitarias para comparar razones y resolver proporciones, es una de las técnicas más apropiadas.
4. Reconocer que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo “regla de tres” para resolver problemas de proporcionalidad, no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

Un segundo paso de utilidad práctica para la enseñanza de este tipo de razonamiento por medio de las tareas, es el cálculo del valor desconocido o faltante de alguno de los cuatro términos que intervienen en una proporción. El conocimiento de una razón se puede usar para hallar el valor de otra. Las tareas en las que aparezcan comparaciones de cantidad-precio, el uso de escalas en los mapas, la solución de problemas de porcentajes y el empleo de recursos informáticos que se ofrecen en internet (<http://math.rice.edu/~lanius/proportions/index.html>) son algunos ejemplos de recursos prácticos en las que se precisa resolver proporciones. Los alumnos deberán aprender a plantear estos problemas de manera simbólica, aplicando algún tipo de algoritmo y a resolverlos numéricamente.

4.4. Faceta ecológica

La proporcionalidad y porcentajes se contempla en diferentes bloques temáticos dentro del currículo (MECD, 2014), donde se establecen los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del currículo básico para la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.

En los *Principios y Estándares 2000* del NCTM (2000) se menciona la proporcionalidad ya en los grados 3-5 en la forma siguiente:

- Comprensión numérica: reconocer y generar formas equivalentes de formas comunes en que se representan las fracciones, decimales y porcentajes.

- Los estudiantes deben comprender el significado de un porcentaje como parte de un total y usar porcentajes comunes como 10 o 50 por ciento. Al estudiar las fracciones decimales y porcentajes conjuntamente pueden aprender a pasar de una a otra forma equivalente.
- Asimismo, en conexión con la estadística se sugiere que *los alumnos representen datos en gráficos de líneas y barras*, en cuya construcción aparece implícitamente la proporcionalidad.

En los grados 6-8 se menciona:

- Trabajar con flexibilidad con fracciones, decimales y porcentajes para resolver tareas.
- Comprender porcentajes mayores que 100 y menores que 1.

Como síntesis de criterios de idoneidad ecológica para procesos de estudio de la proporcionalidad se pueden aplicar los criterios descritos en Godino (2013).

5. Valoración de la idoneidad didáctica y propuestas de cambio

A continuación, se analizan el diseño, la implementación y la evaluación de la experiencia de enseñanza de la unidad didáctica de proporcionalidad y porcentajes vivida en el periodo de prácticas, teniendo en cuenta, tanto los conocimientos didáctico-matemáticos ya sintetizados en la sección anterior, como los criterios de idoneidad didáctica propuestos en Godino (2013). Se trata de responder a las preguntas:

1. ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica, del proceso de enseñanza-aprendizaje sobre la proporcionalidad y porcentajes, experimentado durante el periodo de prácticas en primero de la ESO?
2. ¿Qué cambios se podrían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio, para incrementar su idoneidad didáctica?

En definitiva, se trata de valorar la idoneidad didáctica de la experiencia y de identificar propuestas fundamentadas de posibles cambios, para un futuro rediseño de la unidad didáctica.

5.1. Facetas epistémica y ecológica

El proceso de estudio implementado ha seguido básicamente los contenidos y orientaciones propuestas en el libro de texto (Colera y Gaztelu, 2010), que se emplea para 1º de ESO en el instituto en el que se ha realizado la práctica docente. En éste, a lo largo de todo el desarrollo de la unidad didáctica, se plantea únicamente un enfoque en el estudio y tratamiento de la proporcionalidad, el “aritmético”, echándose en falta el enfoque o desarrollo geométrico y el algebraico, precedidos incluso por algunas actividades de carácter intuitivo y cualitativo. Además, el concepto de la proporcionalidad, desde este enfoque aritmético, se simplifica básicamente en la transmisión de un algoritmo (la regla de tres), que hay que saber aplicar y operar en cada caso. Para poder desarrollar éste método, el libro de texto reduce el concepto de “proporción” a un nuevo nombre para dos fracciones equivalentes y el de “la razón” a un nuevo nombre para la fracción, no contemplándose otro tipo de tratamiento o de tareas que ayuden al alumno a desarrollar el razonamiento proporcional mediante la

reflexión. Desde el punto de vista de la estructuración del contenido, este algoritmo no se debería haber introducido hasta que el alumno hubiera ejercitado o tuviera, un cierto dominio de otros métodos de comprobación y resolución más intuitivos. Resulta evidente que su contenido es básicamente procedimental, haciendo de la “regla de tres” el único método de resolución de los problemas de proporcionalidad, centrando al alumno en una actuación meramente mecánica, vacía de conceptos, carente de razonamientos y exenta de reflexión sobre si los problemas que se plantean son o no de proporcionalidad.

Ahora bien, debido a los contextos en los que se tratan los conceptos y sobre todo las tareas que se proponen a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica, se ve enriquecido el estudio de algunos otros contenidos intradisciplinarios, como son el de los números racionales, la equivalencia de fracciones, los números decimales y el sistema métrico decimal; y otros contenidos interdisciplinarios como son la física, la química y la economía, reconociéndose y aplicándose en éstos últimos, propiedades de la proporcionalidad y los porcentajes. Todo ello contribuye a la formación socio-cultural y profesional de los alumnos, destacándose en éste sentido la parte del libro relativa a los porcentajes.

En cuanto a la serie de tareas contenidas en el libro de texto y que se propusieron a los alumnos para su resolución, suponen una muestra representativa para ejercitar y aplicar el contenido pretendido, aunque se omiten actividades en las que los alumnos tengan que formular sus propios problemas de proporcionalidad y porcentajes, tal y como aconsejan los indicadores de idoneidad epistémica.

En referencia al lenguaje matemático empleado, éste es el adecuado para un nivel educativo de primero de la ESO, aunque, tanto en la parte de tareas como en la parte de los desarrollos conceptuales, se puede comprobar el empleo de una pobre tipología de expresiones y representaciones matemáticas, destacándose únicamente el empleo del lenguaje simbólico y numérico mediante tablas de valores. Esto es debido a la inexistencia de los tratamientos o enfoques geométrico y algebraico de la proporcionalidad, que echan mano principalmente en sus desarrollos del lenguaje gráfico (función lineal) y manipulativo (construcción de figuras semejantes).

Desde la perspectiva curricular o ecológica, la proporcionalidad es introducida en el libro mediante ejemplos, que llevan a definir cuándo existe proporcionalidad directa o inversa entre dos magnitudes, echándose en falta definiciones conceptuales fundamentales como son los de la “razón”, la “proporción” y la “constante de proporcionalidad”, que ni siquiera son mencionadas en alguna sección del libro y que sí se recogen como conceptos clave en las orientaciones curriculares para este nivel educativo.

En consecuencia, por las razones mencionadas anteriormente, se podría calificar la idoneidad epistémica y ecológica del proceso de enseñanza implementado como baja. En los trabajos citados en la sección 4 se pueden encontrar más criterios y recursos para su mejora.

5.2. *Facetas cognitiva y afectiva*

Uno de los errores y dificultades más significativos, detectados en algunos alumnos mediante los dos instrumentos de evaluación llevados a cabo, fue el de no saber distinguir entre la proporcionalidad directa y la inversa, y la distinción entre

situaciones proporcionales y no proporcionales. El libro de texto le dedica muy poco contenido a esta cuestión y hubiera sido conveniente dedicarle algo más de tiempo e incluso enfatizarlo aún más, dándole una mayor importancia a la proporcionalidad desde un tratamiento cualitativo para pasar después al aspecto cuantitativo.

Respecto a la secuenciación temporal del contenido curricular, se justifica suficientemente, (apoyado por lo expuesto anteriormente en la parte de la faceta epistémica), retrasar el estudio de la proporcionalidad y porcentajes en la programación didáctica del centro, anteponiendo unidades didácticas relacionadas con la semejanza de figuras y con las funciones lineales, que sirvan como sustento a los diferentes tratamientos que requiere el tema.

Desde el enfoque aritmético de la proporcionalidad que propone el libro de texto, los conocimientos previos que se requieren para el estudio de proporcionalidad y porcentajes son las fracciones y su equivalencia, la resolución de problemas básicos de aritmética, las operaciones con números decimales y relaciones entre fracciones y números decimales. Todos estos contenidos se impartieron en unidades anteriores según la programación didáctica del centro. Sin embargo, los resultados obtenidos en las dos evaluaciones llevadas a cabo (corrección de tareas de clase y examen evaluativo formativo) no fueron muy satisfactorios, pese a que los contenidos impartidos de la proporcionalidad y porcentajes fueron de un nivel de dificultad accesible y acorde al de primero de la ESO. Muchos de los alumnos presentaron serias dificultades y errores a la hora de operar con números decimales y fracciones, por lo que se debería haber dedicado una sesión inicial al repaso de éstos conocimientos previos.

Uno de los aspectos positivos del libro de texto es que, en la sección de tareas, todas ellas vienen marcadas con un código de triángulos, según el nivel de dificultad que presentan, lo que simplificó el trabajo de adaptación curricular, proponiendo para algunos alumnos tareas de refuerzo y para otros, en el menor de los casos, tareas de ampliación. Gracias a ello, se facilitó el logro de los aprendizajes pretendidos de la unidad didáctica a todos los alumnos de la clase, que partían desde su propio y personal nivel de conocimiento.

Para evaluar el ritmo y el nivel de aprendizaje de los alumnos sobre el contenido impartido, se utilizaron dos instrumentos de evaluación: la recogida y corrección de una serie representativa de tareas, a mitad de la unidad didáctica y un examen de evaluación formativo, al final de ésta. Estos dos instrumentos tuvieron en cuenta en su calificación, los distintos niveles de adquisición del aprendizaje pretendido y una vez corregidos, se repartieron entre los alumnos para que comprobasen y revisasen donde habían cometido los errores. Además, mediante el instrumento evaluativo llevado a cabo a mitad de la unidad didáctica, se pretendió detectar dónde se habían producido las dificultades y errores más comunes, para tratar de adaptar y reconducir la enseñanza, enfatizando más sobre los conceptos y procedimientos clave implicados.

Por otra parte, que el contenido y la serie de tareas propuestas del libro de texto tuvieran familiaridad con el contexto, enriqueció bastante la propuesta didáctica, no solo en el aspecto atencional y motivacional, ya que los alumnos valoraban la utilidad de esta parte de las matemáticas en sus vidas, sino porque, facilitó su entendimiento a la hora de recibir instrucciones con las que debían enfrentarse a los problemas.

La dinámica didáctica desarrollada a lo largo de las sesiones, pretendió sistematizar e incentivar una constancia del trabajo en el alumno: atender a las

explicaciones del profesor, empezar a trabajar las tareas de la materia impartida en clase y terminar de hacer las tareas en casa. También, la realización de las tareas por parejas y la socialización de sus correcciones a lo largo de las sesiones de clase, con preguntas frecuentes y salidas esporádicas a la pizarra, contribuyeron a potenciar la autoestima de los alumnos a la hora de enfrentarse a problemas de proporcionalidad y todos los alumnos mostraron siempre una actitud muy positiva para este tipo de estrategia de trabajo, promoviéndose la participación de los alumnos en las tareas.

En consecuencia, se puede calificar la *idoneidad cognitiva-afectiva* del proceso implementado como de media-baja por las razones antes mencionadas. En los trabajos citados en la sección 4 se pueden encontrar más criterios y recursos para su mejora.

5.3. *Faceta instruccional (interaccional y mediacional)*

Los modos de interacción en el aula que se implementaron en la experiencia docente de prácticas, respondieron básicamente a un modelo tradicional: el profesor primero explica los conceptos y procedimientos, ejemplificándolos en contextos de la vida cotidiana para hacerlos más claros y enfatizando los contenidos clave, para que posteriormente, los alumnos realicen diversas tareas relacionadas con lo impartido. Hubiera sido deseable introducir algunos cambios en el proceso de enseñanza, orientados a que los alumnos planteasen cuestiones y presentasen soluciones; explorando ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usando una mayor variedad de herramientas para razonar, argumentar, hacer conexiones, resolver dificultades y comunicarlas.

Son escasos los momentos en los que se les concedía un grado de autonomía a los estudiantes, exceptuando los momentos de trabajo individual para la realización de las tareas propuestas para casa. Por el contrario, en el trabajo de las tareas en clase, a los alumnos se les permitían que realizaran consultas por parejas con su compañero de pupitre, lo que favoreció el diálogo, la argumentación y la comunicación entre ellos. Igualmente sucedía con las salidas esporádicas de algunos alumnos a la pizarra durante la fase de resolución de las tareas, o con las preguntas lanzadas a los alumnos durante la fase de explicación del profesor. Éstas, no solo contribuyeron a implicar y captar la atención y la motivación de los alumnos, sino que también facilitó la inclusión de los alumnos en la dinámica de clase.

En esta experiencia didáctica se utilizaron únicamente los recursos propios del aula del instituto al alcance de los alumnos: pizarra, proyector, libro de texto y calculadora. No se emplearon recursos manipulativos ni otros recursos TIC ya que en realidad no se consideraron necesarios para apoyar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos planificados.

Con respecto a la componente temporal de la idoneidad instruccional (en su aspecto temporal), se considera que el empleo de las sesiones dedicadas al desarrollo del contenido más importante, de tipo conceptual y procedimental de la proporcionalidad y porcentajes, en sus cuatro enfoques o aproximaciones (intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico) sería escaso si, además, se quiere dedicar el tiempo suficiente a los contenidos que presentan una mayor dificultad de comprensión y aprendizaje.

La distribución de los alumnos en el aula no fue aleatoria, ni escogida por ellos mismos, ya que su comportamiento variaba según el compañero con el que estuvieran sentados. Además, durante las sesiones estuvieron presentes dos profesores de prácticas,

lo que ayudó a que el funcionamiento de la clase fuera el correcto en cuanto a comportamiento y atención. Cuando los dos profesores trabajaban en clase las tareas, los alumnos tenían una atención más personalizada y una mayor dedicación, disponiendo de varias fuentes de consulta para resolver sus dudas. A su vez, a los profesores les servía para llevar a cabo un mejor seguimiento del progreso cognitivo de los estudiantes.

El número de alumnos (30) y su distribución eran idóneos, pero el horario de las clases de matemáticas no fue el adecuado. De las cinco horas semanales de clase, tres estaban colocadas por la mañana antes del recreo, pero las dos horas restantes se situaban a última hora, el último día de la semana. Este hecho no favorecía un nivel adecuado de atención y motivación en clase del alumno, por lo que su comportamiento era complicado de gestionar en estas horas de trabajo.

La mejora de la idoneidad interaccional y mediacional del proceso, nos llevaría a incluir actividades y tareas con material manipulativo y con recursos informáticos (Godino y Batanero, 2003) que pueden constituir herramientas novedosas y útiles para alcanzar los aprendizajes pretendidos.

6. Síntesis y conclusiones

La elaboración de este trabajo ha permitido conocer y aplicar unas herramientas útiles para analizar la práctica docente. Focalizar la atención en la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza vivido, ha llevado a tomar conciencia de la necesidad de recopilar, analizar y sistematizar los conocimientos didáctico-matemáticos disponibles, al menos una parte sustantiva de los mismos. Estos son resultado de la abundante investigación que se viene realizando a nivel internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de los distintos temas curriculares, por lo que cualquier propuesta de cambio en el diseño, implementación y evaluación de todo un curso o una sola unidad didáctica debe tener en cuenta los resultados de las innovaciones e investigaciones previas.

En este caso, la enseñanza de la proporcionalidad y porcentajes, fue implementada en un contexto educativo específico, el cual impone condicionamientos difíciles de superar: tiempo asignado (programación didáctica del centro), material de aprendizaje (libro de texto), así como una manera o concepción implícita de entender la matemática y su enseñanza, compartida por el departamento de matemáticas del centro. Estas restricciones, u otras, siempre estarán presentes en nuestra práctica profesional como profesores; pero es importante tomar conciencia de las mismas, así como de conocer otras maneras de concebir la matemática, su enseñanza y aprendizaje. La reconstrucción de un significado de referencia didáctico-matemático amplio, como el esbozado en la sección 4, es imprescindible para introducir progresivamente propuestas de cambio fundamentadas.

Como indican Posadas y Godino (en prensa), la noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de estudio matemáticos, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas facetas implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales de los estudiantes y la identificación de conflictos de aprendizaje potenciales. La idoneidad interaccional y

mediacional requiere analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles. El análisis de las normas ayudará a comprender los factores ecológicos que condicionan los procesos de estudio, y, por tanto, la valoración de la idoneidad ecológica. El Ministerio de Educación, a través del Real Decreto 1105/2014 que establece el currículo básico de la ESO, hace referencia al estudio de la proporcionalidad y porcentajes de forma conjunta en los cursos de primero y segundo de la ESO, deja en consecuencia una cierta libertad sobre la elección del nivel de dificultad en contenidos, a delimitar entre los dos cursos, a los autores de libros de texto y a los departamentos de matemáticas de los centros educativos.

El mayor condicionamiento para la enseñanza implementada ha venido de la decisión de usar el libro de texto (Colera y Gaztelu, 2010). Tras esta decisión, puede haber una concepción, por parte de los profesores del departamento, que valora positivamente el aprendizaje de algoritmos y atribuye una cierta incapacidad de los estudiantes para la comprensión conceptual y la argumentación deductiva.

Otro factor restrictivo para la introducción de cambios en los contenidos y el consiguiente uso de medios tecnológicos es el tiempo disponible para el desarrollo del tema, la programación didáctica de las matemáticas de primero de la ESO, y en general, en toda la etapa. Parece excesivamente recargado de contenidos, lo que puede dificultar la implementación de innovaciones como las que se han identificado en nuestro estudio del estado de la cuestión.

La formación inicial y permanente de profesores es un factor esencial para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esa formación debe orientarse al desarrollo profesional de los profesores, y ello supone que éstos adquieran y pongan en práctica un profundo conocimiento especializado del contenido en sus diversas facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, 2009).

7. Reconocimiento

Trabajo realizado parcialmente en el marco del proyecto EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

8. Referencias

- Ben-Chaim, D., Keret, Y., y Ilany, B. S. (2012). *Ratio and Proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.
- Bradbury-Huan, H. (2010). What is good action research? Why the resurgent interest? *Action Research*, 8 (1), 93–109.
- Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Colera, J. y Gaztelu, I. (2010). *Matemáticas 1*. Toledo: Anaya.

- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity: From Analysis to Improvement*. Mathematics Education Library (Vol. 41). Boston, MA: Springer US.
- Elliot, J. (1991). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata, 1994.
- Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: un estudio con alumnos de primaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.
- Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (2009) Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM*. Puerto Montt (Chile), 4-9 enero 2009. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/fprofesores_reflexion_guiada_22dic08.pdf
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Godino, J. D. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.
- Inhelder, B., y Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. (M. T. Cevasco, Trad.). París: Presses Universitaires de France. (Traducido del Francés: De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent, 1996)
- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and Children's thinking, *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41-61.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 629-667.
- Martínez, S., Muñoz, J.M., Oller, A.M. y Pecharromán, C. (2015). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Actas del congreso, *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, (pp. 459-470). Segovia: Academia de Artillería.

- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD).
- Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92. doi: 10.1080/01443410601061462
- National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.
- Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood*, 33(1), 31-36.
- Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, 17(1), 59-81.
- Posadas, P. (2013). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3º de educación secundaria obligatoria*. Tesis de Fin de Máster. Universidad de Granada. Recuperada de <http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofesores.htm>
- Posadas, P. y Godino, J. D. (en prensa). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico – matemático. *Didacticae* (en prensa).
- Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Relime*, 9(2), 299-324.
- Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, NY: Basic Books.
- Tourniaire, F., y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181–204.